Oktober-Vollklausur
Analysis II für Ingenieure
Lösungen - Verständnisteil

1. Aufgabe 8 Punkte

Die partiellen Ableitung existieren:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h\cdot \arctan\frac{1}{h^2} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \arctan\frac{1}{h^2} = \frac{\pi}{2}.$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$

f ist im Punkt $(0,0)$ auch stetig, denn wegen $\left|x\cdot\arctan\frac{1}{x^2+y^2}\right| \le |x|\cdot\frac{\pi}{2}$ ist $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x\cdot\arctan\frac{1}{x^2+y^2}) = 0 = f(0,0).$

2. Aufgabe 6 Punkte

Eine Parametrisierung ist

$$\vec{x}(r,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 1-r \end{pmatrix} \quad \text{mit } r\in[\tfrac{1}{2},1], \quad \phi\in[0,2\pi]$$

3. Aufgabe 6 Punkte

Mit dem Satz von Gauß erhält man

$\iint\limits_{\partial K} \vec{v}\cdot d\vec{O} = \iiint\limits_{K} \operatorname{div}\vec{v}\,dxdydz = \iiint\limits_{K} 1\,dxdydz = 2\cdot 3\cdot 2 = 12.$

Es ist div $\vec{v} = -y^2 + 1 + y^2 = 1.$

$\iiint\limits_{K} 1\,dxdydz$ ist das Volumen eines Quaders
mit den Seitenlängen 2, 3 und 2.

4. Aufgabe 7 Punkte

a) M ist kompakt (beschränkt und abgeschlossen) und f ist stetig; folglich nimmt f auf M sowohl einen kleinsten als auch einen größten Funktionswert an.

b) Für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ist $0 < \frac{1}{1+x^2+y^2} \le 1.$

Der maximale Funktionswert 1 wird in $(x,y) = (0,0)$ angenommen.
Das Infimum gleich Null wird nicht angenommen, d.h. es gibt auf $\mathbb{R}^2$ keinen kleinsten Funktionswert..

5. Aufgabe 6 Punkte

Nach dem Hauptsatz für Kurvenintegrale ist:

$\int\limits_{\vec{c}} \operatorname{grad} f \vec{ds} = f(1,1,0) - f(0,1,1) = 1 - (-1) = 2.$

6. Aufgabe 7 Punkte

$\int\limits_0^4 \int\limits_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{1+y^3}\, dydx = \int\limits_0^2 \int\limits_0^{y^2} \frac{1}{1+y^3}\, dxdy = \int\limits_0^2 y^2 \cdot \frac{1}{1+y^3}\, dy = \frac{1}{3} \ln(1+y^3)\Big|_0^2 = \frac{2}{3} \ln 3.$