Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 06/07
Ferus/Grigorieff/Renesse 2. Dezember 2006

Dezember – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **75 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 20 von 40 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 6 von 20 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

5	6	7	8	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 6 Punkte

Zeichnen Sie eine Skizze der 2π-periodischen Funktion f mit

$$f(t) = \begin{cases} \pi + t & \text{falls } -\pi \le t \le 0 \\ \pi - t & \text{falls } \quad 0 < t \le \pi. \end{cases}$$

Berechnen Sie dann die reellen Fourierkoeffizienten und stellen Sie die Fourierreihe auf.

2. Aufgabe 4 Punkte

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^{k+1}} (z - 2i)^k, \quad z \in \mathbb{C},$$

und skizzieren Sie den **Rand** des Konvergenzbereichs.

b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der reellen Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)} (x+1)^k, \quad x \in \mathbb{R},$$

und skizzieren Sie den **Rand** des Konvergenzbereichs.

3. Aufgabe 5 Punkte

Konvergieren die Folgen

a) $\vec{x}_n = \left(\frac{1}{n}, \cos\left(\frac{1}{n}\right), e^{-n}, \frac{2n}{n^2}\right)^T \in \mathbb{R}^4$

b) $\vec{y}_n = \left(\frac{1}{n}, n^2, \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^4}, \frac{1}{n^5}\right)^T \in \mathbb{R}^5$

für $n \to \infty$? Wenn ja, gegen welchen Grenzwert?

4. Aufgabe 5 Punkte

Gegeben sei die Abbildung

$$\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x) \\ e^{xy} \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Dimension der Funktionalmatrix an und bestimmen Sie diese an der Stelle $\binom{0}{1}$.

Verständnisteil

5. Aufgabe

5 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Notieren Sie ihre Lösungen **ohne** Begründung auf einem separaten Blatt. Für eine richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für eine falsche verlieren Sie einen Punkt. Die minimale Punktzahl dieser Aufgabe beträgt 0.

a) Eine Reihe konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen eine Nullfolge ist.

b) Konvergente Folgen sind niemals beschränkt.

c) Das Komplement einer abgeschlossenen Menge ist immer offen.

d) Eine abgeschlossene Menge ist niemals offen.

e) Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann in einem Punkt des $\mathbb{R}^n$ differenzierbar, wenn sie dort stetig ist.

6. Aufgabe

5 Punkte

Untersuchen Sie, wo die Funktion

$$f : \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x > 0, y > 0 \right\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 - y^2} & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

stetig ist und wo nicht.

7. Aufgabe

5 Punkte

Sei $A = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \text{ oder } y = 0\} \setminus \{\vec{0}\}$. Skizzieren Sie A. Geben Sie ∂A an und untersuchen Sie, ob A offen, abgeschlossen oder weder abgeschlossen noch offen ist (mit Begründung!).

8. Aufgabe

5 Punkte

Geben Sie Beispiele für

a) eine divergente beschränkte Folge in $\mathbb{R}$,

b) eine lineare Abbildung $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

c) eine nicht-kompakte beschränkte Menge im $\mathbb{R}^3$,

d) eine divergente Folge im $\mathbb{R}^2$,

e) eine π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f nicht konstant 0, die mit ihrer Fourierreihe übereinstimmt.

Begründungen für die Richtigkeit Ihrer Beispiele sind nicht nötig. Für jedes richtige Beispiel bekommen Sie einen Punkt.