TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Dozenten: Ferus/Grigorieff/Renesse
Assistent: Döring

WS 06/07
02.12.06

Musterlösung Dezember-Klausur Rechenteil WS 06/07
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

(1 Punkt) für die Skizze. Da f gerade ist, sind alle $b_k = 0$ **(1 Punkt)**. Für die a_k nutzen wir die Definition. Mit $T = 2\pi$ und $\omega = 1$ rechnen wir zuerst a_0 aus:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)dt \overset{(1\text{ Punkt})}{=} \pi$$

Für $k > 0$,

$$\begin{aligned} a_k &\overset{(1\text{ Punkt})}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\cos(tk)\,dt = \frac{2}{\pi}[\frac{1}{k}\sin(kt)(\pi - t)]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{k}\sin(kt)\,dt \\ &= -\frac{2}{\pi}[\frac{1}{k^2}\cos(kt)]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right) = \frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^{k+1} + 1\right) \end{aligned}$$

(**(1 Punkt)** für korrekte Rechnung). Also ist

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi k^2} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Damit ist die Fourierreihe gegeben durch

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1)t)$$

(1 Punkt).

2. Aufgabe (4 Punkte)

a) Wir berechnen den Konvergenzradius als Grenzwert von $|\frac{a_k}{a_{k+1}}|$:

$$R = \lim|\frac{a_k}{a_{k+1}}| = \lim\frac{k^2}{2^{k+1}}\frac{2^{k+2}}{(k+1)^2} = \lim\frac{2k^2}{k^2 + 2k + 1} = \lim\frac{2}{1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}} = 2$$

(1 Punkt). Damit ist das Innere des Konvergenzbereichs die offene Kreisscheibe mit Radius 2 um den Punkt $2i$. Der Rand des Konvergenzbereichs ist dann der Kreis mit Radius 2 um den Punkt $2i$. **(1 Punkt)**

b) Wir gehen wie bei a) vor.

$$R = \lim|\frac{a_k}{a_{k+1}}| = \lim|\frac{(-1)^k}{k+1}\frac{k+2}{(-1)^{k+1}}| = \lim|-\frac{k+2}{k+1}| = 1.$$

Folglich ist der Konvergenzradius 1 **(1 Punkt)** und das Innere des Konvergenzbereichs das offene Intervall der Länge 1 mit Mittelpunkt -1. Der Rand davon besteht gerade aus den Punkten -2 und 0 **(1 Punkt)**.

3. Aufgabe (5 Punkte)

a) Die Folge ist konvergent, weil alle Komponentenfolgen konvergieren **(1 Punkt)**. Der Grenzwert $\vec{x}$ berechnet sich dann komponentenweise als Grenzwert jeder Komponente. Der Grenzwert für die dritte Komponente ist 1, da $\cos(0) = 1$ **(1 Punkt)**. Also ist $\vec{x} = (0, 1, 0, 0)$ **(1 Punkt)**.

b) Die Folge ist divergent **(1 Punkt)**, weil die zweite Komponente divergiert **(1 Punkt)**.

4. Aufgabe

(5 Punkte)

Die Dimension der Funktionalmatrix muss 3×2 sein **(1 Punkt)**. Wir stellen die Funktionalmatrix auf, indem alle partiellen Ableitungen berechnet werden **(1 Punkt)**.

$$\vec{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x) & 0 \\ ye^{xy} & xe^{xy} \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

(**2 Punkte** für richtige Matrix) und setzen den Punkt $(0,1)$ ein:

$$\vec{f}'(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1 Punkt)

Musterlösung Dezember-Klausur Verständnisteil WS 06/07 Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

a) Falsch. z.B. konvergiert $\sum \frac{1}{n^2}$ aber die Partialsummen sind positiv und streng monoton wachsend.

b) Falsch, jede konvergente Folge ist beschränkt.

c) Richtig, so ist Abgeschlossenheit definiert.

d) Falsch, z.B. die leere Menge ist offen und abgeschlossen.

e) Falsch, z.B. ist der Betrag in $\mathbb{R}$ in null stetig aber nicht differenzierbar.

Für jede richtige Antwort (ohne Begründung) gibt es genau einen Punkt. Für jede falsche wird genau ein Punkt abgezogen. Mindestpunktzahl ist 0.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Die Funktion ist stetig für alle Punkte (x, y) mit $x \neq y$, da es sich um eine Verknüpfung stetiger Abbildungen handelt **(2 Punkte)**. Weiter ist die Funktion nicht stetig in den Punkten mit $x = y$ **(1 Punkt)**. Für einen Punkt (x, x) wählen wir uns folgende Folge: $(x, x - \frac{1}{n})$. Offensichtlich konvergiert die Folge gegen (x, x) **(1 Punkt)**. Jetzt betrachten wir die Funktionswerte dieser Folge: $f(x, x - \frac{1}{n}) = \frac{x(x-\frac{1}{n})}{x^2-(x-\frac{1}{n})^2} = \frac{x(x-\frac{1}{n})}{x^2-x^2-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}x} = \frac{x(x-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}(-\frac{1}{n}+2x)} = \frac{nx^2-x}{(2x-\frac{1}{n})} \to \infty \neq 0$ **(1 Punkt)**.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Das Bildchen besteht aus den Koordinatenachsen mit Kennzeichnung der fehlenden $(0, 0)$ **(1 Punkt)**. Der Rand besteht aus der Menge A und zusätzlich dem Punkt $(0, 0)$ **(1 Punkt)**. Das liegt daran, dass jeder Kreis um einen Punkt der Koordinatenachsen und ebenso des Punktes $(0, 0)$ sowohl eine Achse als auch das Komplement schneidet **(1 Punkt)**. Da $(0, 0) \neq A$ aber $(0, 0) \in \partial A$, ist A nicht abgeschlossen **(1 Punkt)**. Weiter ist aber A auch nicht offen, weil die Koordinatenachsen ausser $(0, 0)$ in A liegen **(1 Punkt)**.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Wir geben mögliche Beispiele an:

a) eine alternierende Folge a_n mit $a_n = (-1)^n$,

b) $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$,

c) die offene Kugel $K = \{(x, y, z) : |(x, y, z)| < 1\}$,

d) $\vec{x}_n = \binom{n}{n}$,

e) ein Fourierpolynom mit $\omega = 2$, z.B. $f(x) = 1, \forall x$