TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 06/07
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften 19.02.07
Dozenten: Ferus/Grigorieff/Renesse
Assistent: Döring

Musterlösung Februar-Klausur Rechenteil WS 06/07
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

Wir berechnen mit der Formel der Vorlesung den Konvergenzradius R und testen dann die Konvergenz an den Randpunkten.

a) Wir stellen fest, dass die Reihe mit $a_k = \frac{3^k}{\sqrt{(3k-2)2^k}}$ als $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-0)^k$ geschrieben werden kann ((**1 Punkt**) für richtige Auffassung der Potenzreihe). Damit rechnen wir:

$$
\begin{aligned}
R &\overset{\textbf{(1 Punkt)}}{=} \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{3^k}{\sqrt{(3k-2)2^k}}}{\frac{3^{k+1}}{\sqrt{(3(k+1)-2)2^{k+1}}}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\sqrt{(3(k+1)-2)2}}{3\sqrt{(3k-2)}}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6k+2}{3k-2}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6+\frac{2}{k}}{3-\frac{2}{k}}}\right| = \frac{\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

((**1 Punkt**) für eine halbwegs sinnvolle Rechnung, (**1 Punkt**) für die richtige Lösung)

b) Wir testen die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{-\sqrt{2}}{3}\right)^k$ (**1 Punkt**):

$$
\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{2}^k}{\sqrt{3k-2}\sqrt{2}^k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{3k-2}}
$$

Da $\frac{1}{\sqrt{3k-2}}$ eine monotone Nullfolge ist (**1 Punkt**), folgt nach dem Kriterium von Leibniz die Konvergenz ((**1 Punkt**) für Leibniz, (**1 Punkt**) für die Rechnung).

2. Aufgabe (7 Punkte)

a) Kreise um $(-1,-1)$ mit Radius 0, $\sqrt{2}$, 2. **(2 Punkte)**

b) Als Summe differenzierbarer Funktionen existieren alle partiellen Ableitungen und sind stetig. Also ist f differenzierbar (**2 Punkte**).

c) $(2x+2, 2y+2)^T$ **(1 Punkt)**

d) Wenn $\left|\binom{x}{y}\right| \to \infty$ gilt, gilt auch $|x|, |y| \to \infty$. Folglich gilt auch $|1+x|, |1+y| \to \infty$. Dann gilt aber auch $f(x,y) = (1+x)^2 + (1+y)^2 \to \infty$ ((**2 Punkte**), 1 Punkt gibt es für eine mathematisch schlechte Darstellung der richtigen Idee).

3. Aufgabe (8 Punkte)

Wir berechnen erst einmal den Gradienten: $\operatorname{grad} f(x,y) = (2xy-4x, x^2-2y-5)^T$ (**1 Punkt**). Nullsetzten ergibt folgende kritische Stellen: $(0,-2\frac{1}{2})^T$, $(3,2)^T$, $(-3,2)^T$ (**2 Punkte**). Weiter berechnen wir die Determinante der Hessematrix:

$$
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\right)^2 = -4y + 8 - 4x^2.
$$

(**1 Punkt**). Einsetzen von $(0,-2\frac{1}{2})$ ergibt: $\frac{\partial^2 f(0,-2\frac{1}{2})}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(0,-2\frac{1}{2})}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(0,-2\frac{1}{2})}{\partial x\partial y}\right)^2 = 18$. Zusammen mit $\frac{\partial^2 f(0,-2\frac{1}{2})}{\partial x^2} = -14 < 0$ (**1 Punkt**) sehen wir, dass in $(0,-2\frac{1}{2})$ ein lokales Maximum angenommen wird (**1 Punkt**). ((**2 Punkte**), wenn der Satz über Extremstellen angewendet wird (auch wenn die Rechnung nicht ganz richtig ist)).

4. Aufgabe

(10 Punkte)

a) $\vec{\gamma}$ ist Teil einer Spirale um die z-Achse. Sie startet in $(1,0,0)^T$, endet in $(0,-1,\frac{3}{2}\pi)^T$ und dreht sich mit Radius 1 **(1 Punkt)**.

b) Da der ganze Raum konvex ist, ist rot $\vec{F}_\alpha = \vec{0}$ notwendig und hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion (**1 Punkt**, den Punkt gibt es auch ohne Konvexität). Wegen

$$\text{rot } \vec{F}_\alpha = (2y - \alpha y, 0, 0)^T,$$

existiert ein Potential genau dann, wenn $\alpha = 2$ **(1 Punkt)**.

c) Wir gehen wir im Skriptum vor und setzen an:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\phi &= \sin(z)\\ \frac{\partial}{\partial y}\phi &= 2yz\\ \frac{\partial}{\partial z}\phi &= x\cos(z) + y^2\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich $\phi(x,y,z) = x\sin(z) + c(y,z)$. Aus der zweiten Gleichung bekommen wir $\phi(x,y,z) = x\sin(z) + y^2 z + c(z)$. Da sich aber mit $c(z) = 0$ bereits die richtige Ableitung nach z ergibt, ist $\phi(x,y,z) = x\sin(z) + y^2 z$ eine mögliche Stammfunktion (**(2 Punkte)** für eine beliebige Herleitung der Stammfunktion. Auch für "geschicktes schauen").

d) Da für $\alpha = 2$ eine Stammfuntion existiert, errechnet sich das Kurvenintegral als Differenz des Anfangs- und des Endwertes (**1 Punkt**). Also ist $\int_{\vec{\gamma}} \vec{F}_2 \cdot \vec{ds} = \phi(0,-1,\frac{3}{2}\pi) - \phi(1,0,0) = \frac{3}{2}\pi$ **(1 Punkt)**.

e) Hier müssen wir das Kurvenintegral direkt längs $\vec{\gamma}$ ausrechnen (**(1 Punkt)** für die Erkenntnis). Wir setzen also die Definition ein (**(1 Punkt)** für Anwenden der Parametrisierung): $\int_{\vec{\gamma}} \vec{F}_0 \cdot \vec{ds} = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \vec{F}_0(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)dt = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (\sin(t), 0, \cos^2(t) + \sin^2(t))^T \cdot (-\sin(t), \cos(t), 1)^T dt = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} (-\sin^2(t) + 1)dt = \frac{3}{4}\pi$ **(1 Punkt)**.

5. Aufgabe

(7 Punkte)

a) Viertelkreis im 4.ten Quadranten. **(2 Punkte)**

b) Wir rechnen (**(1 Punkt)** für die richtige Übersetzung des Viertelkreises, **(1 Punkt)** für den richtigen Radius)

$$\begin{aligned}\iint_B xy\,dxdy &= \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\int_0^1 r\cos(\phi) r\sin(\phi) r\,drd\phi = \int_{\frac{3}{2}}^{2\pi} \frac{1}{4}\sin(\phi)\cos(\phi)\,d\phi\\ &= -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

(**(1 Punkte)** für die richtige Rechnung). Dabei berechnet sich das letzte Integral wie folgt:

$$\frac{1}{4}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin(\phi)\cos(\phi)\,d\phi = -\frac{1}{4}\cos(\phi)\cos(\phi)|_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} - \frac{1}{4}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\cos(\phi)\sin(\phi)\,d\phi$$

also

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin(\phi)\cos(\phi)\,d\phi = -\frac{1}{4}\cos(\phi)\cos(\phi)|_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} = -\frac{1}{4}$$

(**(2 Punkte)** für die richtige Berechnung des Integrals. Andere Berechnungen, z.B. unter Verwendung des Additionstheorems $\sin(\phi)\cos(\phi) = \frac{1}{2}\sin(2\phi)$ sind natürlich auch erlaubt.).

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 06/07
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften 19.02.2007
Dozenten: Ferus/Grigorieff/Renesse
Assistent: Döring

Musterlösung Februar-Klausur Verständnisteil WS 06/76
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

a) falsch

b) falsch

c) richtig

d) falsch

e) falsch

f) richtig

g) richtig

h) richtig

2. Aufgabe (8 Punkte)

a) Wir betrachten die Folge $(x_n, y_n)^T = (\frac{1}{n}, 0)^T \to (0,0)^T$ (**1 Punkt**), auch andere Folgen möglich). Damit gilt: $f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \to 1 \neq 0$. Damit ist f in $(0,0)$ nicht stetig **(2 Punkte)**.

b) Wir setzen in die Definition des Differenzenquotienten ein ((**1 Punkt**), oder auch direkt aus a)):

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} = \infty,$$

also ist f nicht in Richtung x in $(0,0)^T$ differenzierbar **(2 Punkte)**.

c) Da f in $(0,0)^T$ nicht stetig ist, kann f in $(0,0)^T$ auch nicht total differenzierbar sein **(2 Punkte)**.

3. Aufgabe (8 Punkte)

Wir stellen fest, dass div $\vec{v} = 1$ **(1 Punkt)** ist. Nach dem Satz von Gauß müssen wir jetzt nur noch das Integral $\iiint_H 1\,dxdydz$ (**2 Punkte**) berechnen. Dazu benutzen wir Kugelkoordinaten **(1 Punkt)**. Weil wir nur die Halbkugel betrachten, ist $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ **(1 Punkt)**.

$$\begin{aligned}
\iiint_H 1\,dxdydz &\overset{\textbf{(1 Punkt)}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin(\theta)\, drd\varphi d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \sin(\theta)\, d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\pi \sin(\theta)\, d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\pi \cos(\theta)|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2}{3}\pi
\end{aligned}$$

((**1 Punkt**) für die richtige Anwendung der Kugelkoordinaten, (**1 Punkt**) für die Rechnung)

4. Aufgabe (9 Punkte)

a) Wir parametrisieren über D: $(x, y, f(x,y))^T, \binom{x}{y} \in D$ ist eine mögliche Parametrisierung **(1 Punkt)**.

b) Die Kurve ist der Teil der Ellipse mit $a = 2$, $b = 3$ im 1.ten Quadranten (**1 Punkt**). Eine mögliche Parametrisierung ist

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}, \ t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

(1 Punkt)

c) Parametrisierung des ausgefüllten Kreises erfolgt mit $(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))^T$ mit $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ **(1 Punkt)**. Um den Kreis in den Raum zu legen wird eine Komponente hinzugefügt: $(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), 1)^T$ mit $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ **(1 Punkt)**.

d) Wir parametrisieren zwei Kreise mit Radien 1 und Mittelpunkt $(1,0)^T$ bzw. $(-1,0)^T$: $\vec{\gamma}_1(t) = (\cos(t) - 1, \sin(t))^T$, $t \in [0, 2\pi]$ und $\vec{\gamma}_2(t) = (\cos(t) + 1, \sin(t))^T$, $t \in [\pi, 3\pi]$ (**1 Punkt**). Beide Kurven haben Anfangs- wie Endpunkt $(0,0)$. Wir definieren nun $\vec{\gamma} := \vec{\gamma}_1 \cup \vec{\gamma}_2$ (**1 Punkt**). Damit haben wir auch schon das Argument, weshalb das Kurvenintegral verschwindet:

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{ds} = \int_{\vec{\gamma}_1} \vec{v} \cdot \vec{ds} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot \vec{ds} = 0 + 0,$$

weil $\vec{\gamma}_1$ und $\vec{\gamma}_2$ geschlossen sind und $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist **(2 Punkte)**.

5. Aufgabe (7 Punkte)

a) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}(x - x_0)^k$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

b) A der Einheitskreis und B das Innere von A.

c) Wähle eine stetige Funktion (z.B. $f(x,y) = x$)) und ändere sie an einer Stelle ab

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mit $f(x,y) = x$.

e) $\vec{v}(x,y,z) = (x, 0, 0)^T$.

f) Wir brauchen nur ein Vektorfeld ohne Potential zu wählen, z.B. $\vec{v}(x,y,z) = (y, 0, 0)^T$.

g) D das Einheitsquadrat und $f(x,y) = 1$, $\forall (x,y)^T \in D$.

h) Wähle $f(x,y,z) = x$, dann ist $\operatorname{grad} f(x,y,z) = (1,0,0)^T$. Damit ist f eine Stammfunktion von $\vec{u}(x,y,z) = (1,0,0)^T$.