Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 06/07
Ferus/Grigorieff/Renesse 19. Februar 2007

Februar – Klausur (Verständnisteil)
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe

8 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Notieren Sie Ihre Lösungen **ohne** Begründung auf einem separaten Blatt. Für eine richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für eine falsche verlieren Sie einen Punkt. Die minimale Punktzahl dieser Aufgabe beträgt 0.

a) Potenzreihen mit endlichem Konvergenzradius konvergieren auch am Rand.

b) Wird ein einzelner Punkt einer abgeschlossenen Menge entnommen, so bleibt diese abgeschlossen.

c) Die Einträge von Funktionalmatrizen sind partielle Ableitungen.

d) Stetige Abbildungen auf abgeschlossenen Mengen nehmen Extrema an.

e) Der Gradient ist für alle skalaren Felder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert.

f) Für Vektorfelder $\vec{v}$ mit stetigen 2. partiellen Ableitungen gilt:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{v} = 0.$$

g) Ein Vektorfeld $\vec{v}$ hat genau dann ein Potential, wenn für jede geschlossene Kurve $\vec{\gamma}$ gilt: $\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{ds} = 0$.

h) Kann eine glatte Fläche F in glatte Flächenstücke zerlegt werden, so berechnet sich jedes Flussintegral über F als Summe der Flussintegrale über die Flächenstücke.

2. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y}{x^2+y^2} & \text{für } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \\ 0 & \text{für } \binom{x}{y} = \binom{0}{0} \end{cases}.$$

a) Ist f in $\binom{0}{0}$ stetig?

b) Ist f in $\binom{0}{0}$ partiell nach x differenzierbar?

c) Ist f in $\binom{0}{0}$ total differenzierbar?

3. Aufgabe

8 Punkte

Nutzen Sie den Satz von Gauß um folgende Gleichheit zu zeigen:

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{dO} = \frac{2}{3}\pi,$$

wobei S die Oberfläche der Halbkugel $H = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ ist und

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

4. Aufgabe

9 Punkte

a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann kann der Graph als glatte Fläche im Raum interpretiert werden. Geben Sie eine mögliche Parametrisierung der Fläche an.

b) Skizzieren und parametrisieren Sie das kürzere Bogenstück der Ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ zwischen den Punkten $\binom{2}{0}$ und $\binom{0}{3}$.

c) Parametrisieren Sie den ausgefüllten Kreis, der parallel zur xy-Achse im Raum liegt und den Punkt $(0, 0, 1)^T$ beinhaltet.

d) Geben Sie eine Parametrisierung einer in der Ebene liegenden '8' (die '8' soll aus zwei Kreisen bestehen, die sich nur im Punkte $\vec{0}$ berühren). Begründen Sie, dass das Kurvenintegral eines beliebigen Potentialfelds über Ihre '8' gleich Null ist.

5. Aufgabe

7 Punkte

Geben Sie Beispiele für

a) eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 2,

b) zwei Mengen A und B, so dass B gerade das Innere von A ist,

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f ist nicht stetig,

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ohne globales Maximum,

e) ein Vektorfeld $\vec{v}$ mit $\operatorname{div} \vec{v} \neq 0$,

f) ein Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dessen Kurvenintegral nicht wegunabhängig ist,

g) einen Integrationsbereich D und eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}$ mit $\iint_D f(x, y)\, dxdy = 1$,

h) eine Stammfunktion eines Vektorfeldes.

Von den 8 möglichen Beispielen müssen Sie nur 7 bearbeiten. Begründungen für die Richtigkeit Ihrer Beispiele sind nicht nötig. Für jedes richtige Beispiel bekommen Sie einen Punkt.