TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 06/07
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften 02.04.07
Dozenten: Ferus/Grigorieff/Penn-Karras/Renesse
Assistent: Döring

Musterlösung April-Klausur Rechenteil WS 06/07
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Die Hessematrix ist gegeben durch ((**2 Punkte)** für den richtigen Ansatz)

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2 y} & -\frac{1}{y^2 x} \\ -\frac{1}{y^2 x} & 2\frac{\ln(x)}{y^3} \end{pmatrix}$$

((**2 Punkt)** für die richtige Matrix).

2. Aufgabe (9 Punkte)

Der erste Schritt besteht darin die Nullstellen des Gradienten zu finden **(1 Punkt)** :

$$grad\, f(x,y) = \left(3x^2 - 6y\,,\, 24y^2 - 6x\right) \stackrel{!}{=} (0,0)$$

Das entspricht dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{lccccc} \text{I} & x^2 - 2y & = & 0 & \Rightarrow & y = \frac{x^2}{2} \\ \text{II} & 4y^2 - x & = & 0 & & \end{array}$$

(1 Punkt) . y in II einsetzen liefert: $x^4 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\, x_2 = 1.$
x_1 in I einsetzen liefert: $y_1 = 0$, x_2 in I ergibt: $y_2 = \frac{1}{2}$. Es gibt also 2 Kandidaten

$$P_1(0,0), P_2(1, \tfrac{1}{2})$$

((**2 Punkte)** , je einen pro Kandidaten). Die Hessematrix lautet

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{pmatrix}$$

(1 Punkt) . Überprüfen der Kandidaten:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det H_f(0,0) = -36 < 0$$

$$H_f(1, \tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{pmatrix}, \quad \det H_f(1, \tfrac{1}{2}) = 108 > 0, f_{xx}(1, \tfrac{1}{2}) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \text{Minimum}$$

(1 Punkt)

Das lokale Minimum ist kein globales Minimum **(1 Punkt)** . Hält man z.B. $y = 0$ fest und verfolgt die Funktion in Richtung der x-Achse, so ist die Funktion $x^3 + 1$. Da aber x^3 in Richtung $-\infty$ gegen $-\infty$ fällt, kann es kein globales Minimum geben **(2 Punkte)** .

3. Aufgabe (10 Punkte)

a) Wir testen erst die notwendige und ($\mathbb{R}^3$ konvex) hinreichende Potentialbedingung:

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2yz - 2yz \\ 0 - 0 \\ 2x - 2x \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Damit existiert ein Potential ((**1 Punkt)** für den Ansatz, **(1 Punkt)** für richtige Rechnung). Das selbe tun wir für $\vec{u}$ und erhalten

$$\text{rot } \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

Also besitzt $\vec{u}$ kein globales Potential **(1 Punkt)** . Jetzt berechnen wir eine Stammfunktion für $\vec{v}$. Wir gehen wie im Skriptum vor und setzen an:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}F &= 2xy + e^x \\ \frac{\partial}{\partial y}F &= x^2 + yz^2 \\ \frac{\partial}{\partial z}F &= zy^2\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich $F(x,y,z) = x^2y + e^x + c(y,z)$. Aus der zweiten Gleichung bekommen wir $F(x,y,z) = x^2y + e^x + \frac{1}{2}z^2y^2 + c(z)$. Da sich aber mit $c(z) = 0$ bereits die richtige Ableitung nach z ergibt, ist $F(x,y,z) = x^2y + e^x + \frac{1}{2}z^2y^2$ eine mögliche Stammfunktion (**(2 Punkte)** für eine beliebige Herleitung der Stammfunktion. Auch für "geschicktes schauen").

b) Eine mögliche Parametrisierung ist mit $t \in [0,1]$

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

(1 Punkt) .

c) Da wir jetzt für $\vec{v}$ eine Stammfunktion gefunden haben können wir das Kurvenintegral direkt berechnen:

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v}(x,y,z) \cdot \vec{ds} = F(\vec{\gamma}(1)) - F(\vec{\gamma}(0)) = F(1,1,1)^T - F(0,0,0)^T = \frac{1}{2} + e$$

(**(1 Punkt)** für richtigen Ansatz, **(1 Punkt)** für richtige Rechnung). Da $\vec{u}$ keine Stammfunktion besitzt, rechnen wir von Hand **(1 Punkt)** :

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{u} \cdot \vec{ds} = \int_0^1 \vec{u}(\vec{\gamma}(s)) \cdot \vec{\gamma}'(s)\, ds = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2s \\ 0 \\ s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \int_0^1 3s\, ds = \frac{3}{2}$$

(1 Punkt) .

4. Aufgabe

(7 Punkte)

Das Volumen berechnen wir indem wir die 1 über den Bereich integrieren **(1 Punkt)** . Per Mehrfachintegration führen wir das auf 1-dim Integrale zurück **(2 Punkte)** .

$$\begin{aligned}Vol(K) &\overset{\textbf{(1 Punkt)}}{=} \iiint_K 1\, dzdydx \overset{\textbf{(1 Punkt)}}{=} \int_0^1 \int_{2x}^{2x+1} \int_0^x 1\, dzdydx \\ &= \int_0^1 \int_{2x}^{2x+1} x\, dydx = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(**(1 Punkt)** für sinnvolle Rechnung, **(1 Punkt)** für richtiges Ergebniss).

5. Aufgabe

(10 Punkte)

E ist eine Halbkugel **(1 Punkt)** . Die Schnittmenge ist ein Kreis mit Radius 1 um $\vec{0}$ **(2 Punkte)** . Um das Integral zu berechnen nutzen wir den Satz von Stokes. Dazu müssen wir die Randkurve parametrisieren:

$$\vec{\gamma} : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

(2 Punkte) . Die Parametrisierung nutzen wir um per Hand das Kurvenintegral zu berechnen ($\vec{v}$ hat kein Potential), welches durch den Satz von Stokes auftaucht:

$$\begin{aligned}\iint_E \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{dO} &\overset{\textbf{(2 Punkte)}}{=} \int_{\partial E} \vec{v} \cdot \vec{ds} \overset{\textbf{(1 Punkt)}}{=} \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{\gamma}(s)) \cdot \vec{\gamma}(t)'\, ds \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t) + \sin^2(t) + \cos^2(t)\, dt = 2\pi\end{aligned}$$

(**(1 Punkt)** für Begründung des Integrals, **(1 Punkt)** für restliche Rechnung). Nur den Satz von Stokes hinschreiben ohne weitere Rechnung gibt keinen Punkt.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 06/07
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften 02.04.2007
Dozenten: Ferus/Grigorieff/Penn-Karras/Renesse
Assistent: Döring

Musterlösung April-Klausur Verständnisteil WS 06/76 Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

a) falsch

b) richtig

c) falsch

d) richtig

e) falsch

f) falsch

g) richtig

h) richtig

2. Aufgabe (8 Punkte)

Wir berechnen die Ableitunsmatrix von f: $f'(x,y) = (4x\sqrt{y}, \frac{x^2}{\sqrt{y}})^T$ **(1 Punkt)** . An der Stelle $(1,1)^T$ ergibt dies $f'(1,1) = (4,1)$ **(1 Punkt)** . Wir setzten also folgenderweise an: $(4,1) \cdot (v_1, v_2)^T = 0$ **(2 Punkte)** . Das gibt uns $4v_1 + v_2 = 0$, also $4v_1 = -v_2$ **(1 Punkt)** . Die Richtung ist also gegeben durch jeden Vektor mit $(s, -4s)^T$ **(1 Punkt)** . Um zu normieren, betrachten wir $s^2 + (-4s)^2 = 1$. Also $s^2 = \frac{1}{17}$, was $s = \sqrt{\frac{1}{17}}$ impliziert. Damit ist der Vektor $(\sqrt{\frac{1}{17}}, -4\sqrt{\frac{1}{17}})^T$ ein normierter Richtungsvektor **(2 Punkte)** .

3. Aufgabe (8 Punkte)

a) Ein Kreis parallel zur xy-Achse **(2 Punkte)**

b) Eine Strecke von $(0,0,1)^T$ nach $(\cos(\phi), \sin(\phi), 0)^T$ **(2 Punkte)**

c) Ein Kegel mit Spitze in $(0,0,1)^T$ **(2 Punkte)**

Die Kurve kann auch als Strecke parametrisiert werden:

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} (1-t)\cos(\phi) \\ (1-t)\sin(\phi) \\ t \end{pmatrix}$$

(2 Punkte)

4. Aufgabe (8 Punkte)

Wir schreiben das Problem folgendermassen: Mit $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ **(2 Punkte)** (aufgrund der Monotonie können wir die Wurzel auch weglassen) müssen solche Punkte Minima von f unter der Nebenbedingung $h(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ sein **(1 Punkt)** . Da E kompakt ist und f stetig ist, existieren solche Punkte **(1 Punkt)** . Notwendige Bedingungen sind folgende **(2 Punkte)** :

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}_{(x,y)} f &= \lambda \mathrm{grad}_{(x,y)} h \\ h(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda(4x+y) \\ 2y &= \lambda(2y+x) \\ x^2+y^2+xy-1 &= 0 \end{aligned}$$

oder vereinfacht

$$\begin{aligned} 2x(1-2\lambda)-\lambda y &= 0 \\ 2y(1-\lambda)-x &= 0 \\ x^2+y^2+xy-1 &= 0 \end{aligned}$$

(**(2 Punkte)** für die Gleichungen)

5. Aufgabe (8 Punkte)

a) abgeschlossene Einheitskugel,

b) $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})^T$, $k \in \mathbb{N}$,

c) $v(x,y,z) = \begin{cases} x, (x,y,z)^T \neq \vec{0} \\ 1, (x,y,z)^T = \vec{0} \end{cases}$,

d) $f(x,y) = (\frac{1}{2}x^2 - \cos(y), xy + x, -\sin(x)y)^T$,

e) $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)^T$, $\vec{v}(x,y,z) = (0,0,0)^T$,

f) $f(x,y,z) = \frac{1}{6}$, $\forall (x,y,z) \in S$,

g) $(2t, 2t)^T$, $t \in [0, \frac{1}{2}]$ und $(2(1-t), 2(1-t))^T$, $t \in [\frac{1}{2}, 1]$,

h) $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3, (x,y)^T \mapsto (x,y,0)^T$