Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 06/07
Ferus/Grigorieff/Penn-Karras/Renesse 02. April 2007

April – Klausur (Verständnisteil)
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe 8 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Notieren Sie Ihre Lösungen **ohne** Begründung auf einem separaten Blatt. Für eine richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für eine falsche verlieren Sie einen Punkt. Die minimale Punktzahl dieser Aufgabe beträgt 0.

a) Jede Menge A, deren Randpunkte zu A gehören, ist kompakt.

b) Die Funktionalmatrix einer differenzierbaren Abbildungen $\vec{v} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ist eine (3×4)-Matrix.

c) Für Vektorfelder gilt: totale Differenzierbarkeit ist äquivalent zur Stetigkeit.

d) Die Stammfunktion eines Potentialfeldes kann mit Hilfe von Kurvenintegralen berechnet werden.

e) Falls $\iint_D F(x, y)\, dxdy = 1$ gilt, so muss auch für alle $(x, y) \in D$ gelten, das $F(x, y)$ positiv ist.

f) Die Menge $\{(x, y)^T : x^2 + y^2 = 1)\}$ im $\mathbb{R}^2$ ist eine Fläche.

g) Ein Skalarfeld f ist genau dann stetig in $\vec{x}$, wenn gilt: Für alle Folgen $\vec{x}_n$ mit $\vec{x}_n \to \vec{x}$ gilt: $f(\vec{x}_n) \to f(\vec{x})$.

h) Existieren alle partiellen Ableitungen einer Abbildung $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und sind stetig, so ist $\vec{f}$ differenzierbar.

2. Aufgabe 8 Punkte

Gegeben sei das Skalarfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto 2x^2\sqrt{y}.$$

Geben Sie die Funktionalmatrix an und finden Sie eine Richtung, in die f an der Stelle $(1, 1)$ die Steigung 0 hat. Geben Sie den Richtungsvektor auf die Länge 1 normiert an.

3. Aufgabe 8 Punkte

Sei $\vec{f}\colon [0, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\vec{f}(r, \phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 1 - r \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie die geometrischen Objekte die entstehen, wenn

a) r fest und ϕ variabel,

b) ϕ fest und r variabel,

c) r und ϕ variabel sind.

Geben Sie eine weitere Parametrisierung der Kurve aus b) an.

4. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben sei die kompakte Menge

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 2x^2 + 2xy + y^2 = 1 \right\}.$$

Leiten Sie ein Gleichungssystem her, welches jeder Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E$ lösen muss, der den minimalen Abstand aller Punkte aus E zum Ursprung hat. Warum muss das Gleichungssystem eine Lösung haben?

5. Aufgabe

8 Punkte

Geben Sie (möglichst einfache) Beispiele für

a) eine kompakte Menge im $\mathbb{R}^3$,

b) eine konvergente Folge im $\mathbb{R}^2$,

c) ein Skalarfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ das außer in $\vec{0}$ überall differenzierbar ist,

d) eine Abbildung $\vec{f}$, deren Ableitung durch

$$\vec{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} x & \sin(y) \\ y+1 & x \\ -\cos(x)y & -\sin(x) \end{pmatrix}$$

gegeben ist,

e) ein Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und ein Vektorpotential $\vec{F}$ von $\vec{v}$,

f) eine skalare Funktion $f : S \to \mathbb{R}$, S die Oberfläche eines Würfels mit Kantenlängen 1 im $\mathbb{R}^3$, mit

$$\iint_S f \, dO = 1$$

g) die Parametrisierung einer geschlossenen Kurve (kein Kreis),

h) die Parametrisierung einer Fläche in $\mathbb{R}^3$ (keine Kugel)

an. Begründungen für die Richtigkeit Ihrer Beispiele sind nicht nötig. Für jedes richtige Beispiel bekommen Sie einen Punkt.