Juli-Klausur
Analysis II für Ingenieure
Lösungen (Rechenteil)

1. Aufgabe 6 Punkte

Die Funktionalmatrix ist

$$\vec{f}\,'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos y \cdot e^{x\cos y} & -x\sin y\, e^{x\cos y} \\ \frac{\sin x\,\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} & 0 \\ \frac{2xy^4}{1+x^2y^4} & \frac{4x^2y^3}{1+x^2y^4} \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe 5 Punkte

Es ist $\operatorname{grad}_{(x,y)} f = (2 - y\sin x,\ \cos x)^T$ und $\operatorname{grad}_{(0,\pi)} f = (2,\ 1)^T$.

Die Richtung des größten Anstiegs im Punkt $(0,\pi)$ ist somit $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der Anstieg ist Null
in allen Richtungen $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ mit $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rangle = 0$,

also in den Richtungen $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. Aufgabe 9 Punkte

$\operatorname{grad} f = \vec{0}$ liefert das Gleichungssystem

$$3x + y\sum a_i - \sum b_i = 3x + 6y - 8 = 0$$
$$x\sum a_i + y\sum a_i^2 - \sum a_i b_i = 6x + 14y - 19 = 0$$

mit der Lösung $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{3}{2}$.

Es ist

$$\det H_{(x,y)} f = \det \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} = 3\cdot 14 - 36 > 0 \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 3 > 0.$$

Im Punkt $(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2})$ hat die Funktion folglich ein lokales Minimum.

Wegen $f(x,y) \geq 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x,0) = \infty$ existiert kein globales Maximum, und das lokale Minimum ist auch globales Minimum.

4. Aufgabe 7 Punkte

Die Nebenbedingung $g(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2 - 3 = 0$
und $\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$ ergeben das Gleichungssystem:

$2x - 1 = \lambda x$
$4y + 2 = \lambda 2y$
$\frac{x^2}{2} + y^2 - 3 = 0$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $2(x+y) = \lambda(x+y)$.
Für $x + y \neq 0$ erhält man $\lambda = 2$ im Widerspruch zur ersten Gleichung.
Für $x + y = 0$ erhält man unter Verwendung der dritten Gleichung
die Lösungen $x = \sqrt{2},\ y = -\sqrt{2}$ und $x = -\sqrt{2},\ y = \sqrt{2}$

Da f stetig und $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$ kompakt ist,
nimmt f auf B Maximum und Minimum an.

Der Vergleich ergibt:
$f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 9 - 3\sqrt{2}$ (Minimum)
$f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 9 + 3\sqrt{2}$ (Maximum)

Es ist $\operatorname{grad} g = \vec{0}$ nur für $(x,y) = (0,0) \notin B$.

5. Aufgabe 6 Punkte

Es sei $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.
Unter Verwendung von Polarkoordinaten erhält man:

$$V = \iint\limits_K 4 - (x^2+y^2)\, dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 (4 - r^2) \cdot r\, drd\phi = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi.$$

6. Aufgabe 7 Punkte

Mit der Parametrisierung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2u+3v \end{pmatrix} \qquad (u,v) \in B := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid -u^2 \leq v \leq u,\ 0 \leq u \leq 1\}$$

erhält man

$$\iint\limits_B \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\right| dudv = \iint\limits_B \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| dudv = \int\limits_0^1 \int\limits_{-u^2}^{u} \sqrt{14}\, dudv$$

$$= \sqrt{14} \int\limits_0^1 (u + u^2)\, du = \frac{5}{6}\sqrt{14}.$$