Oktober-Klausur
Analysis II für Ingenieure
Lösungen (Rechenteil)

1. Aufgabe 8 Punkte

$\operatorname{grad} f = \vec{0}$ liefert das Gleichungssystem

$$2xy^2 + e^x - e = 0$$
$$2yx^2 = 0$$

Aus der zweiten Gl. erhält man $x = 0$ (Widerspruch zur ersten Gl.) oder $y = 0$. Einzige Lösung ist somit $x = 1$, $y = 0$.

Es ist

$\det H_{(x,y)} f = \det \begin{pmatrix} 2y^2 + e^x & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$,

$\det H_{(1,0)} f = \det \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2e > 0$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = e > 0$.

Im Punkt (1, 0) hat die Funktion folglich ein lokales Minimum, $f(1,\, 0) = 0$.

Wegen $e^x \geq ex$ ist $f(x,y) \geq 0$.

Das lokale Minimum ist deshalb auch globales Minimum.
Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x,0) = \infty$ existiert kein globales Maximum.

2. Aufgabe 7 Punkte

Da f stetig und D kompakt ist, nimmt f auf D einen kleinsten und einen größten Funktionswert an.
Wegen $\operatorname{grad} f \neq \vec{0}$ gibt es keine lokalen Extrema!
Für den Rand von D ergeben die Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ und $\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$ das Gleichungssystem:

$$3 = \lambda 2x$$
$$-4 = \lambda 2y$$
$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $y = -\frac{4}{3}x$.

Aus der dritten Gleichung erhält man damit $x^2 = \frac{9}{25}$, $\quad x = \pm\frac{3}{5}$

Der Vergleich ergibt:

$f(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = -\frac{9}{5} - \frac{16}{5} = -5$ (Minimum)

$f(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) = 5$ (Maximum)

3. Aufgabe 6 Punkte

Es ist $x^3 + xy^2 = x(x^2 + y^2) = r^3 \cos\phi$.

Man erhält:

$$\iint_B (x^3 + xy^2)\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \cos\phi \cdot r\, drd\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \cdot \frac{r^5}{5}\Big|_0^1 d\phi = \frac{1}{5}.$$

4. Aufgabe 5 Punkte

$\mathbb{R}^3$ ist konvex und $\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-0 \\ 2x-2x \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Folglich ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld.

Mit der Ansatzmethode errechnet man

$\int 2xy\, dx = x^2y + h(y,z)$

$$x^2 + \frac{\partial h(y,z)}{\partial y} = x^2 + z, \quad \text{folglich } h(y,z) = zy$$

Damit ist $f(x,y,z) = x^2y + zy$ eine Stammfunktion von $\vec{v}$.

5. Aufgabe 7 Punkte

Für $\vec{x}(r,\phi) = (r\cos\phi,\, r\sin\phi,\, 1-r^2)^T$ errechnet man

$\frac{\partial\vec{x}}{\partial r} = (\cos\phi,\, \sin\phi,\, -2r)^T, \quad \frac{\partial\vec{x}}{\partial\phi} = (-r\sin\phi,\, r\cos\phi,\, 0)^T,$

$\frac{\partial\vec{x}}{\partial r} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial\phi} = (2r^2\cos\phi,\, 2r^2\sin\phi,\, r)^T,$

$$\iint_B \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 1-r^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2r^2\cos\phi \\ 2r^2\sin\phi \\ r \end{pmatrix} drd\phi$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (r - r^3)\, dr = \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

6. Aufgabe 7 Punkte

Mit der Parametrisierung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\sqrt{2}\cos\phi \\ r\sqrt{2}\sin\phi \\ r \end{pmatrix} \qquad r \in [1,\, 2], \quad \phi \in [0,\, 2\pi]$$

erhält man

$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 \left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial r} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial\phi}\right| drd\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left| \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\phi \\ \sqrt{2}\sin\phi \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sqrt{2}\sin\phi \\ r\sqrt{2}\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \right| drd\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2r^2\cos^2\phi + 2r^2\sin^2\phi + 4r^2}\, drd\phi = 2\pi\sqrt{6}\,\frac{r^2}{2}\Big|_1^2 = 3\sqrt{6}\,\pi.$$