TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 07/08

Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften 18.02.08

Dozenten: Hoffmann/Karow/Scheutzow

Assistent: Döring/Drewitz/Krüger

Musterlösung Februar-Klausur Rechenteil WS 07/08
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

Wir erhalten

$$f'(x,y) = (4x+2y-6, 2x+6y-8)$$

(1 Punkt).

Als einzige Lösung zu $f'(x,y) = 0$, d.h. als einzigen kritischen Punkt erhalten wir $(1,1)$ **(2 Punkte)**.

Die zugehörige Hessematrix ist durch

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(1 Punkt)

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben.

Wegen $4 > 0$ und $\det f''(1,1) > 0$ ist $f''(1,1)$ positiv definit **(1 Punkt)** und in $(1,1)$ hat f ein zumindest lokales

Minimum **(1 Punkt)**.

Um zu untersuchen, ob es sich hierbei sogar um ein globales Minimum handelt, erinnern wir an die Taylorformel,

welche

$$f(1+x, 1+y) = f(1,1) + \frac{1}{2}(x,y)f''(1+tx, 1+ty)(x,y)^T$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und geeignetes $t \in [0,1]$ liefert. Da, wie oben festgestellt,

$f''(x,y)$ nicht von (x,y) abhängt, folgt somit, dass $(1,1)$ sogar ein striktes **(1 Punkt)** globales **(1 Punkt)**

Minimum ist.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Die Richtung des stärksten Anstiegs ist durch den Gradienten gegeben **(1 Punkt)**, welcher sich zu

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (y^2, 2(x-1)y)^T$$

berechnet **(1 Punkt)** und an der Stelle $(1,1)$ ausgewertet den Vektor $(1,0)^T$ liefert **(1 Punkt)**. Somit ist die Größe des Anstiegs entlang des gegebenen Vektors durch $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$ **(2 Punkte)** gegeben.

3. Aufgabe (8 Punkte)

Skizze: **(2 Punkte)**.

Wir können B darstellen als

$$B = \{(x,y) : 1 \leq y \leq 2; 1/y \leq x \leq y\}$$

(2 Punkte) (andernfalls für richtige Integrationsgrenzen).

Somit erhalten wir

$$V = \int_1^2 \Big(\int_{1/y}^{y} \frac{y^2}{x^2}\, dx \Big) dy = \int_1^2 -y^2/x|_{x=1/y}^{y} dy = \int_1^2 (-y+y^3)\, dy = 9/4$$

(4 Punkte).

4. Aufgabe (10 Punkte)

$\vec{\gamma}$ ist ein Weg von $(0,0,0)^T$ nach $(1,2,3)^T$. **(2 Punkte)** $\mathbb{R}^3$ ist eine konvexe Menge **(1 Punkt)** und $\vec{v}$ ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ **(2 Punkte)**, also besitzt $\vec{v}$ ein Potential **(1**

Punkt) . Demnach ist das Kurvenintegral von $\vec{v}$ wegunabhängig. Wir bestimmen ein Potential u von $\vec{v}$, das gegeben ist durch $u(x,y,z) = -3/2x^2 + x - 3/2y^2 + 2y - 3/2z^2 + z$ **(1 Punkt)** Es ist dann

$$\begin{aligned}\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{ds} =& u(0,0,0) - u(1,2,3) \quad \textbf{(2Punkte)} \\ =& 0 - (-13) = 13 \quad \textbf{(1 Punkt)}\end{aligned}$$

5. Aufgabe

(9 Punkte)

Eine Parametrisierung der Mantelfläche ist durch $\vec{u}(x,y) = (x, y, 1 - \sqrt{x^2+y^2})$, $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} =: D$ gegeben **(2 Punkte)**. Wir erhalten

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}(x,y) = (1, 0, -x/\sqrt{x^2+y^2})^T$$

(1 Punkt) und

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial y}(x,y) = (0, 1, -y/\sqrt{x^2+y^2})^T$$

(1 Punkt); weiterhin ergibt sich

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2+y^2} \\ y/\sqrt{x^2+y^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1 Punkt). Folglich berechnen wir für die Mantelfläche des Kegels

$$\iint_D \left| \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2+y^2} \\ y/\sqrt{x^2+y^2} \\ 1 \end{pmatrix} \right| dxdy = \iint_D \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2}\pi$$

(3 Punkte) da die Grundfläche des Kegels einen Flächeninhalt von π hat, ist der gesuchte Flächeninhalt durch $(\sqrt{2}+1)\pi$ gegeben **(1 Punkt)**.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Dozenten: Hoffmann/Karow/Scheutzow
Assistent: Döring/Drewitz/Krüger

WS 07/08
18.02.2008

Musterlösung Februar-Klausur Verständnisteil WS 07/08
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

Das folgende sind einfache Beispiele, es gibt natürlich noch viele andere.

a) $B = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} 1, & x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

c) Eine differenzierbares Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot} \vec{v} \neq \vec{0}$ besitzt kein Potential. Es ist $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$, also besitzt $\vec{v}$ mit $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ kein Potential.

d) $g(x,y) = \frac{y}{x}$.

e) Der volle Einheitskreis $K = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ ist konvex.

Jede Teilaufgabe einen Punkt.

2. Aufgabe (8 Punkte)

a) wahr

b) falsch

c) falsch

d) falsch

e) wahr

f) wahr

g) falsch

h) wahr

Jede Teilaufgabe einen Punkt.

3. Aufgabe (11 Punkte)

a) Die Abstandsfunktion $f(x,y,z) = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ist stetig. **(1 Punkt)** E ist kompakt **(1 Punkt)** , also besitzt $f : E \to \mathbb{R}$ sowohl ein Maximum als auch ein Minimum **(2 Punkte)** .

b) Aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion nimmt f genau dann ein Extremum in $(x,y,z)^T$ an, wenn $\tilde{f} = f^2$ ein Extremum in $(x,y,z)^T$ annimmt. **(1 Punkt)** Betrachten wir die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, g(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1$, so muss $\tilde{f}$ maximiert/minimiert werden unter der Nebenbedingung $g = 0$. **(2 Punkte)** $\tilde{f}$ und g sind differenzierbar, so dass die Lagrangesche Multiplikatorenregel anwendbar ist. Es müssen also folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}\tilde{f} &= \lambda \operatorname{grad} g, \qquad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R} \\ g &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \text{grad } g =& \vec{0} \\ g =& 0 \end{aligned}$$

(Je **(1 Punkt)** für jede Gleichung). Damit ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x =& 2\lambda x \\ 2y =& \frac{\lambda}{2} y \\ 2z =& \frac{2}{9}\lambda z \\ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} =& 1 \quad \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 2x =& 0 \\ \frac{y}{2} =& 0 \\ \frac{2}{9} z =& 0 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} =& 1 \quad \textbf{(1 Punkt)} \ . \end{aligned}$$

4. Aufgabe

(8 Punkte)

Offensichtlich ist f als Komposition stetiger Funktion auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ stetig. **(2 Punkte)** Weiterhin erhalten wir für $y \neq 0$ und $x > 0$, dass $f(x, y) = y$ ein anderes Vorzeichen hat als $f(-x, y) = -y$. Da in diesem Fall $f(0, y) \neq 0$ gilt, kann in diesen Punkten keine Stetigkeit vorliegen **(3 Punkte)**. Im Ursprung erhalten wir mit $|f(x, y)| = |xy|/|x| = |y| \to 0$, falls $(x, y) \to (0, 0)$ **(2 Punkte)** Somit ist die Menge aller Punkte, in welchen f stetig ist durch

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$$

gegeben **(1 Punkt)** .

5. Aufgabe

(8 Punkte)

$\vec{v}$ ist stetig differenzierbar **(1 Punkt)** und H kompakt **(1 Punkt)** , also gilt nach dem Satz von Gauss

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{O} =& \iiint_H \operatorname{div} \vec{v} \, dx dy dz \quad \textbf{(1 Punkt)} \\ =& \iiint_H 2 \, dx dy dz \quad \textbf{(1 Punkt)} \\ =& 2 \text{ vol}(H) \quad \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

H ist eine Halbkugel mit Radius $r = \frac{1}{2}$ **(1 Punkt)** , also $\text{vol}(H) = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{12}$. Also folgt

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{O} = \frac{\pi}{6}. \quad \textbf{(2 Punkte)}$$