Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 07/08
Hoffmann/Karow/Scheutzow 18. Februar 2008

Februar – Klausur (Verständnisteil)
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe 5 Punkte

Geben Sie jeweils ein Beispiel **ohne** Begründung für

a) eine abgeschlossene, aber nicht kompakte Menge $B \subsetneq \mathbb{R}^3$,

b) eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die nicht stetig ist,

c) ein Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, das kein Potential besitzt,

d) eine stetige Funktion $g :]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$, die kein Maximum besitzt,

e) eine konvexe Menge $K \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $K \notin \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$,

an.

2. Aufgabe 8 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Notieren Sie Ihre Lösungen **ohne** Begründung auf einem separaten Blatt. Für eine richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für eine falsche verlieren Sie einen Punkt. Die minimale Punktzahl dieser Aufgabe beträgt 0.

a) Die Fourierreihe an der Stelle t einer stetigen, stückweise monotonen und periodischen Funktion f konvergiert gegen $f(t)$.

b) Stetige Funktionen, deren Definitionsbereich nicht kompakt ist, besitzen kein Maximum.

c) Wenn U und V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind, so ist $U \setminus V$ offen.

d) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so ist f stetig in x_0.

e) Jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist total differenzierbar.

f) Die leere Menge in $\mathbb{R}^3$ ist kompakt.

g) Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{R}^3$ offen. Ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{v} : G \to \mathbb{R}^3$ besitzt genau dann ein Potential, wenn $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$.

h) Wenn das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorpotential besitzt, so verschwindet das Flussintegral $\iint_F \vec{v} \cdot d\vec{O}$ über jede geschlossene Fläche F.

3. Aufgabe 11 Punkte

Sei f diejenige Funktion, die jedem Punkt des Ellipsoids $E = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1\}$ den Abstand zum Nullpunkt zuordnet.

a) Zeigen Sie, dass f ein lokales Maximum und ein lokales Minimum besitzt.

b) Welche Gleichungen müssen die möglichen Kandidaten erfüllen?

Hinweis: Sie müssen die Gleichungen nicht lösen.

4. Aufgabe

8 Punkte

Bestimmen Sie die Menge aller Punkte, in denen die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} \frac{xy}{|x|}, & \text{falls } x \neq 0 \\ y, & \text{falls } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

stetig ist.

5. Aufgabe

8 Punkte

Nutzen Sie den Satz von Gauß um folgendes Integral zu berechnen:

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{O},$$

wobei S die Oberfläche der Halbkugel

$$H = \{(x, y, z) \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \leq \frac{1}{4}, z \geq 3\}$$

ist und

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4y^2 + x \\ e^x - z \\ z + y \end{pmatrix}.$$

Warum dürfen Sie den Satz von Gauß überhaupt anwenden?

Hinweis: Das Volumen einer Kugel mit Radius R beträgt $\frac{4}{3}\pi R^3$.