TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 07/08
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften 07.04.08
Dozenten: Hoffmann/Karow/Scheutzow
Assistent: Döring/Drewitz/Krüger

Musterlösung April-Klausur Rechenteil WS 07/08
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (9 Punkte)

a) **(1 Punkt)**

b) Die allgemeine reelle Fourierreihe ist

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t) \quad \textbf{(1 Punkt)} \ .$$

Hier ist $\omega = 1$. **(1 Punkt)** Da f gerade, gilt $b_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. **(1 Punkt)** Für a_k gilt

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} -t \cos(kt) dt \quad \textbf{(1 Punkt)} \ .$$

Für a_0 folgt also

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} -t dt = -\pi \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Für $k \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} a_k =& \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} -t \cos(kt) dt \\ =& -\frac{2}{\pi k^2} \cos(kt) \Big|_0^{\pi} \\ =& \begin{cases} \frac{4}{\pi k^2}, & k \text{ ungerade} \\ 0, & k \text{ gerade} \end{cases} \quad \textbf{(2 Punkte)} \ . \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir für die reelle Fourierreihe für $f(t)$

$$-\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2 \pi} \cos((2k+1)t) \quad \textbf{(1 Punkt)} \ .$$

2. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$. Es muss dann also f minimiert/maximiert werden unter der Nebenbedingung $g = 0$. Extremalstellen müssen erfüllen:

$$\begin{aligned} \text{grad } f(\vec{x}) =& \lambda \text{grad } g(\vec{x}) \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R} \\ g(\vec{x}) =& 0 \quad \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \text{grad } g(\vec{x}) =& 0 \\ g(\vec{x}) =& 0. \quad \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

Es ist grad $f(\vec{x}) = (2xy, x^2 + z^2, 2yz)^T$ und grad $g(\vec{x}) = (2x, 2y, -1)^T$ **(2 Punkte)** . Man sieht sofort, dass die zweite Bedingung nicht erfüllt sein kann **(1 Punkt)** . Es muss also gelten

$$\begin{aligned} 2xy =& \lambda 2x \\ x^2 + z^2 =& \lambda 2y \\ 2yz =& -\lambda \\ x^2 + y^2 - z =& 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 0$ oder $y = \lambda$. **(1 Punkt)**

1. Fall: $x = 0$. Dann folgt aus der vierten Gleichung $z = y^2$ und in die zweite und dritte Gleichung eingesetzt

$$\begin{aligned} y^4 =& 2\lambda y \\ 2y^3 =& -\lambda \end{aligned}$$

Das ist nur möglich für $y = 0$. Dann folgt auch $z = 0$. **(2 Punkte)**

2. Fall: $\lambda = y$. Dann folgt mit der dritten Gleichung $y = 0$ oder $z = -\frac{1}{2}$. Die zweite Möglichkeit widerspricht der vierten Gleichung. **(1 Punkt)** Dann folgt aber aus der zweiten Gleichung $x^2 + z^2 = 0$, also $x = z = 0$. **(1 Punkt)**

Der einzige Kandidat für eine lokale Extremalstelle unter der Nebenbedinugung $g = 0$ ist also $(0, 0, 0)$.

3. Aufgabe

(7 Punkte)

In Kugelkoordinaten gilt $\mu(r, \varphi, \vartheta) = r^2 \cos \vartheta$. **(1 Punkt)** Es gilt dann

$$\begin{aligned} \iiint_H \mu(x, y, z) dx dy dz =& \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^2 \cos \vartheta r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr \quad \textbf{(1 Punkt)} \\ =& 2\pi \frac{1}{5} r^5 \Big|_0^1 \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \quad \textbf{(2 Punkte)} \\ =& \frac{2\pi}{5} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\vartheta d\vartheta \\ =& \frac{\pi}{5} \left[-\frac{1}{2} \cos(2\vartheta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}) \quad \textbf{(2 Punkte)} \\ =& \frac{\pi}{5}. \quad \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

4. Aufgabe

(7 Punkte)

Die Taylorformel zweiter Ordnung mit Entwicklungspunkt $(0, 0)$ ist gegeben durch

$$f(x, y) = f(0, 0) + f'(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x, y) f''(tx, ty) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ für ein } t \in]0, 1[. \quad \textbf{(1 Punkt)}$$

Es ist $f'(x, y) = (\sin y e^{x+y}, (\cos y + \sin y) e^{x+y})$ **(1 Punkt)** und

$$f''(x, y) = e^{x+y} \begin{pmatrix} \sin y & \cos y + \sin y \\ \cos y + \sin y & 2 \cos y \end{pmatrix}$$

(2 Punkte) Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x, y) =& 0 + (0, 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^{t(x+y)} (x, y) \begin{pmatrix} \sin ty & \cos ty + \sin ty \\ \cos ty + \sin ty & 2 \cos ty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ =& y + \frac{1}{2} e^{t(x+y)} (x^2 \sin ty + 2xy(\cos ty + \sin ty) + 2y^2 \cos ty) \text{ für ein } t \in]0, 1[. \textbf{ (3 Punkte)} \end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned} f(x, y) =& f(0, 0) + f'(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (x, y) f''(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \textit{ Fehler}, \text{ mit} \\ \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\textit{Fehler}}{|(x, y)|^2} =& 0. \end{aligned}$$

Also

$$f(x, y) = y + \frac{1}{2} (x, y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \textit{ Fehler } = y + xy + y^2 + \textit{ Fehler}$$

5. Aufgabe

(7 Punkte)

Es gilt unter Verwendung von Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z)$:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 3x^2 z + 3y^2 z = 3z(x^2 + y^2) = 3zr^2 \textbf{ (2 Punkte)} .$$

Nach dem Satz von Gauss gilt also:

$$\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \iiint_B \operatorname{div}(\vec{v}) dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 3zr^2 r dr d\varphi dz = 6\pi \int_0^2 z dz \int_0^1 r^3 dr = 3\pi \textbf{ (5Punkte)}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 07/08
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften 07.04.2008
Dozenten: Hoffmann/Karow/Scheutzow
Assistent: Döring/Drewitz/Krüger

Musterlösung April-Klausur Verständnisteil WS 07/08 Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

a) richtig

b) richtig

c) falsch

d) falsch

e) falsch

f) richtig

g) richtig

h) falsch

(1 Punkt) je Teilaufgabe.

2. Aufgabe (7 Punkte)

h ist stetig auf $[-1,1]\times]-1,1]$, weil es sich um eine Verknüpfung stetiger Funktionen handelt **(2 Punkte)** . Die Punkte, die die Nebenbedingung erfüllen, sind gerade die Punkte auf einem Kreis um den Punkt $(0,0)$ mit Radius 1 **(1 Punkt)** . Zum Beispiel die Folge $\vec{a}_n = (\sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}, -1 + \frac{1}{n})$ erfüllt die Nebenbedingung und $h(\vec{a}_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \to \infty$ **(3 Punkte)**. Folglich kann h unter der Nebenbedingung $g = 0$ kein Maximum annehmen **(1 Punkt)** .

3. Aufgabe (9 Punkte)

Eine Parametrisierung des Viertelkreises ist gegeben durch

$$\vec{\gamma}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)^T,\ t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

(2 Punkte) . $\vec{v}$ ist ein Potentialfeld, weil

$$\operatorname{rot} \vec{v} = (0,0,0)$$

und $\mathbb{R}^3$ konvex ist **(2 Punkte)** . Da $\vec{\gamma}$ und $\vec{\beta}$ die selben Anfangs- und Endpunkte haben und $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist, gilt

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{ds} = \int_{\vec{\beta}} \vec{v} \cdot \vec{ds}$$

(2 Punkte) . Das Kurvenintegral berechnet sich also als

$$\int_{\vec{\beta}} \vec{v} \cdot \vec{ds} = \int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{ds} \overset{\textbf{(1 Punkt)}}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \vec{v}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1,0,0)^T \cdot (-\sin(t), \cos(t), 0)^T\, dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\, dt = [\cos(t)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -1.$$

(1 Punkt) für Rechnung, **(1 Punkt)** für das Ergebnis.

4. Aufgabe (8 Punkte)

F ist die obere Hälfte der Einheitskugel und damit eine parametrisierte Fläche mit glattem Rand (Einheitskreis).**(1 Punkt)** Das Vektorfeld ist stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^3$, also insbesondere in einer Umgebung von F. Folglich dürfen wir den Satz von Stokes nutzen **(2 Punkte)** . Da ∂F der Einheitskreis $\vec{\gamma}$ ist **(2 Punkte)** , ergibt das

$$\iint_F \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{O} \overset{\textbf{(1 Punkt)}}{=} \int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{ds} = 0,$$

weil $\vec{v}$ in einer konvexen Menge um $\vec{\gamma}$ (z.B. $\{(x, y, z)^T : z \leq \frac{1}{4}\}$) ein Potentialfeld ist und $\vec{\gamma}$ geschlossen ist **(2 Punkte)** .

5. Aufgabe (8 Punkte)

a) $\vec{a}_n = (n, n, n)$,

b) $g(x, y) = 1, g'(x, y) = (0, 0)$,

c) $f(x, y) = x^2 + y^2$,

d) Verbindungsstrecke von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$,

(2 Punkte) je Teilaufgabe.