Juli-Klausur
Analysis II für Ingenieure
Lösungen (Rechenteil)

1. Aufgabe 9 Punkte

$\text{grad} f = \vec{0}$ liefert das Gleichungssystem

$$3x^2 - 6y = 0$$
$$3y^2 - 6x = 0$$

Aus der ersten Gleichung erhält man $y = \frac{1}{2}x^2$.
In die zweite eingesetzt ergibt das die Gl. $x(x^3 - 8) = 0$.
Lösungen sind $x = 0$ und $x = 2$.

Kritische Punkte sind somit $(0,\, 0)$ und $(2,\, 2)$
Die Hessematrix ist
$H_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 6y \end{pmatrix}$,
Für die kritischen Punkte erhält man:
$\det H_{(0,0)}f = -36 < 0$
$\det H_{(2,2)}f = 144 - 36 > 0$ und $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,2) > 0$.
In $(0,\, 0)$ liegt somit ein Sattelpunkt vor, und im Punkt $(2,\, 2)$ hat die Funktion ein lokales Minimum.
Wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x,0) = \infty$ existieren kein globalen Extrema.

2. Aufgabe 7 Punkte

Da f stetig und $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 4y^2 = 8\}$ kompakt ist, nimmt f auf D einen kleinsten und einen größten Funktionswert an.
$\text{grad}\, f = \lambda\, \text{grad}\, g$ und die Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 8 = 0$ ergeben das Gleichungssystem:

$$1 = \lambda 2x$$
$$-2 = \lambda 8y$$
$$x^2 + 4y^2 - 8 = 0$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $x = \frac{1}{2\lambda}$ und $y = -\frac{1}{4\lambda}$.
In die dritte eingesetzt erhält man damit die Gleichung $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 8$ mit den Lösungen $\lambda = \pm\frac{1}{4}$.

Die Punkte, in denen f unter der Nebenbedingung Extrema annimmt, sind somit $(2,\, -1)$ und $(-2,\, 1)$.

Der Vergleich ergibt:

$f(2,\,-1) = 4$ (Maximum)

$f(-2,\,1) = -4$ (Minimum)

Der Fall $\operatorname{grad} g = \vec{0}$ ist nicht relevant,
denn es ist $\operatorname{grad} g = \vec{0}$ nur für $(x,\,y) = (0,\,0)$, aber $g(0,\,0) = -8 \neq 0$.

3. Aufgabe 9 Punkte

Der Körper ist $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.
Mit dem Satz von Gauß und Zylinderkoordinaten erhält man:

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \iiint\limits_{K} \operatorname{div}\vec{v}\, dV = \iiint\limits_{K} (x^2 + y^2)\, dV = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_{r^2}^1 r^2 \cdot r \, dz dr d\phi$$

$$= 2\pi \int\limits_0^1 r^3 (1 - r^2)\, dr = 2\pi \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6}\right) = \tfrac{\pi}{6}.$$

4. Aufgabe 6 Punkte

Es ist $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $\dot{\vec{c}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \end{pmatrix}$, $t \in [0,\, 2\pi]$.

Man erhält:

$$\int\limits_{\vec{c}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin^2 t + \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int\limits_0^{2\pi} (1 + \cos t)\, dt = 2\pi$$

5. Aufgabe 9 Punkte

Der Integrationsbereich ist $B = \{(x,\,y) \in R^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1,\, x \leq y \leq 2 - x\}$

$$\iint\limits_B x^2 y \, dx\, dy = \int\limits_0^1 \int\limits_x^{2-x} x^2 y \, dy\, dx = \int\limits_0^1 x^2 \left[\tfrac{y^2}{2}\right]_x^{2-x} dx = 2 \int\limits_0^1 (x^2 - x^3)\, dx$$

$$= 2 \cdot \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{6}.$$