Juli-Klausur
Analysis II für Ingenieure
Lösungen (Verständnisteil)

1. Aufgabe 7 Punkte

a) f ist in $(0,0)$ nicht stetig, denn z.B.

für $x_n = y_n = \dfrac{1}{n^2}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,\, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n^6}+\frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+n^5}{2n^4} = \infty$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existiert nicht, denn $\lim\limits_{h\searrow 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\searrow 0} \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \infty$

c) Da f in $(0,0)$ nicht stetig ist, ist f dort auch nicht differenzierbar.
Alternative Begruendung:
Da $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ nicht existiert, ist f in $(0,\,0)$ nicht differenzierbar.

2. Aufgabe 4 Punkte

Eine Parametrisierung ist $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$ $t \in [0,\, \dfrac{\pi}{4}]$

3. Aufgabe 9 Punkte

Gegeben sind $\vec{g}(x,\,y) = (xy,\, x+2y)^T$ und $f'(x,\,y) = (\sin(x^2))\;\; y)$.
Man ermittelt
$\vec{g}(1,0) = (0,\,1)^T$,
$\vec{g}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{g}\,'(1,\,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
Mit der Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned} h'(1,0) &= f'(\vec{g}(1,0)) \cdot \vec{g}\,'(1.0) \\ &= f'(0,1) \cdot \vec{g}\,'(1,\,0) \\ &= (0\;1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\;2) \end{aligned}$$

Die Richtung des stärksten Anstiegs für die Funktion h im Punkt $(1,0)$ ist die Richtung $(1,\,2)^T$.

4. Aufgabe 5 Punkte

$\vec{v}$ ist ein Potentialfeld,
denn der Definitionsbereich ist offen und konvex und es ist $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$
Alternative Begründung:
Eine Stammfunktion ist $f(x,y,z) = -\cos x + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}z^2$.
Es ist $\vec{c}(0) = (1,\,0,\,0)^T$ und $\vec{c}(2\pi) = (1,\,0,\,2\pi)$.
Folglich

$\int\limits_{\vec{c}} \vec{v} \cdot \vec{ds} = f(1,0,2\pi) - f(1,0,0) = -\cos(1) + \frac{1}{2} \cdot (2\pi)^2 - (-\cos(1)) = 2\pi^2.$

5. Aufgabe 9 Punkte

Eine Parametrisierung der Fläche F ist $\vec{x}(u, v) = (u, v, 2 - u + v)^T$
mit $(u, v) \in D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2 + v^2 \leq 1\}$.

Ein Normalenvektor ist

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\vec{n}| = \sqrt{3}$$

Man erhält für den Flächeninhalt

$$A = \iint\limits_F 1 \, dO = \iint\limits_D \sqrt{3} \, dudv = \sqrt{3}\,\pi.$$

(Der Flächeninhalt von D ist π.)

6. Aufgabe 6 Punkte

Der Integrationsbereich in der xy-Ebene wird begrenzt durch die y-Achse und die Parabel $x = 4 - y^2$ $(y = \pm\sqrt{4 - x})$

Man erhält:

$$\int_0^4 \left(\int_{-\sqrt{4-x}}^{\sqrt{4-x}} f(x, y) \, dy \right) dx$$