Oktoberklausur – Analysis II für Ingenieure – Lösungen – Rechenteil

1. Aufgabe (5 Punkte)

$$\vec{f}\,' = \begin{pmatrix} -y\sin x e^{y\cos x} & \cos x e^{y\cos x} \\ 2y^2\sin x\cos x & 2y\sin^2 x \\ \ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2}{x^2+y^2} & \frac{2xy}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe (5 Punkte)

Gesucht ist eine Funktion $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} u = -\vec{v}$,
Ansatz:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y^2\cos x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^{2z} + 2y\sin x, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2ye^{2z}.$$

1. Gleichung: $\Rightarrow \quad f(x,y,z) = y^2\sin x + c(y,z).$
2. Gleichung: $\Rightarrow \quad \frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = e^{2z} \quad \Rightarrow \quad f(x,y,z) = y^2\sin x + ye^{2z} + d(z).$
3. Gleichung: $\Rightarrow \quad \frac{\partial d}{\partial z}(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x,y,z) = y^2\sin x + ye^{2z} + k$

Ein Potential ist somit $u(x,y,z) = -y^2\sin x - ye^{2z}$

3. Aufgabe (10 Punkte)

Da f stetig und B kompakt ist, nimmt f auf D einen kleinsten und einen größten Funktionswert an.

Kandidaten für Extremstellen im Inneren:

$\operatorname{grad} f = \vec{0}$ liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung $x = 0,\ y = 0.$
Somit ist $(0,0)$ der einzige kritische Punkt im Inneren von D.

Kandidaten für Extremstellen auf dem Rand $g(x,y) = x^2 + y^2 - 8 = 0$:

$\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$ und die Nebenbedingung ergeben das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x - y &= \lambda 2x \\ -x + 2y &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt $\lambda = 1 - \frac{y}{2x}$ und $\lambda = 1 - \frac{x}{2y}$.
Hieraus folgt $\frac{y}{2x} = \frac{x}{2y}$, d.h. $y^2 = x^2$.
In die dritte Gleichung eingesetzt erhält man damit $x = \pm 2$.
Kandidaten für Extrema auf dem Rand sind somit $(-2,2)$, $(2,-2)$, $(-2,-2)$ und $(2,2)$.
Der Vergleich ergibt:

$f(-2,\ 2) = f(2,-2) = 11$ (Maximum)

$f(-2,\ -2) = f(2,2) = 3$

$f(0,\ 0) = -1$ (Minimum)

Der Fall $\operatorname{grad} g = \vec{0}$ ist nicht relevant,
denn es ist $\operatorname{grad} g = \vec{0}$ nur für $(x,\ y) = (0,\ 0)$, aber $g(0,\ 0) = -8 \neq 0$.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Parametrisierung der Strecke: $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1+t \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$.

Vektorielles Bogenelement: $\vec{ds} = \dot{\vec{c}}(t)\,dt = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt$.

$$\int\limits_{\vec{c}} \vec{v}\cdot\vec{ds} = \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} 1-2t+t^2-(1+t) \\ 1-t^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int\limits_0^1 1+3t-2t^2\,dt = \left[t+\frac{3}{2}t^2-\frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{11}{6}$$

5. Aufgabe (9 Punkte)

Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse ist $(0,0)$,
Schnittpunkt des Kreises mit der positiven x-Achse ist $(\sqrt{2},0)$.
Einsetzen von $x^2 = y$ in die Kreisgleichung ergibt $y + y^2 = 2$ mit den Lösungen $y = 1$ und $y = -2$.
Schnittpunkt der Parabel mit dem Kreis im 1. Quadranten ist deshalb $(1,1)$.
Bereichsbeschreibung: $B = \{(x,y)\,|\,0 \le y \le 1,\ \sqrt{y} \le x \le \sqrt{2-y^2}\}$

$$\begin{aligned}\iint\limits_B x\,dx\,dy &= \int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} x\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}x^2\Big|_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} dy = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}(2-y^2-y)\,dy \\ &= y-\frac{1}{6}y^3-\frac{1}{4}y^2\Big|_0^1 = 1-\frac{1}{6}-\frac{1}{4} = \frac{7}{12}\end{aligned}$$

Alternativ:
$B = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\} \cup \{(x,y)\,|\,1 \le x \le \sqrt{2},\ 0 \le y \le \sqrt{2-x^2}\}$

$$\begin{aligned}\iint\limits_B x\,dx\,dy &= \int\limits_0^1\int\limits_0^{x^2} x\,dy\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} x\,dy\,dx = \int\limits_0^1 xy\Big|_0^{x^2} dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} xy\Big|_0^{\sqrt{2-x^2}} dx \\ &= \int\limits_0^1 x^3\,dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} x\sqrt{2-x^2}\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\left(\sqrt{2-x^2}\right)^3\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}+\frac{1}{3} = \frac{7}{12}\end{aligned}$$

6. Aufgabe (5 Punkte)

$\dot{\vec{c}}(t) = (\cos\ln t\cdot\frac{1}{t}\,,\,-\sin\ln t\cdot\frac{1}{t})^T = \frac{1}{t}(\cos\ln t\,,\,-\sin\ln t)^T$

Skalares Bogenelement:

$ds = |\dot{\vec{c}}(t)|\,dt = \frac{1}{t}\sqrt{(\cos\ln t)^2+(\sin\ln t)^2}\,dt = \frac{1}{t}\,dt$

$L = \int\limits_{\vec{c}} 1\,ds = \int\limits_1^e \frac{1}{t}\,dt = \ln t\Big|_1^e = 1.$