Oktoberklausur – Analysis II für Ingenieure – Lösungen – Verständnisteil

1. Aufgabe (8 Punkte)
Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin h}{h^3} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(2x\sin x + x^2\cos x)(x^2+y^2) - 2x^3\sin x}{(x^2+y^2)^2}$$

Für $x=0,\ y\neq 0$ ist daher $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{0}{y^4} = 0$, und folglich

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0 \neq 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ ist somit im Punkt $(0,0)$ nicht stetig.

2. Aufgabe (7 Punkte)
Mit dem Satz von Gauß erhält man

$$\iint_{\partial K} \vec{v}\cdot d\vec{O} = \iiint_K \operatorname{div}\vec{v}\, dxdydz = 3\iiint_K dxdydz = 3\cdot 6\pi = 18\pi.$$

(Es ist $\operatorname{div}\vec{v} = 3$, K ist ein Zylinder mit dem Radius $\sqrt{2}$, der Höhe 3 und dem Volumen $\pi(\sqrt{2})^2\cdot 3 = 6\pi$.)

3. Aufgabe (6 Punkte)
Es ist
$\operatorname{grad}_{(x,y)} f = (\arctan y,\ \frac{x}{1+y^2})^T$
Die Richtung des größten Anstiegs im Punkt $(-2,1)$ ist somit $\operatorname{grad}_{(-2,1)} f = (\frac{\pi}{4},\ -1)^T$
Die Richtung der Tangente an die Niveaulinie ist hierzu senkrecht,
d.h. es ist die Richtung $(1,\frac{\pi}{4})^T$

4. Aufgabe (8 Punkte)
Die Ränder sind

$\partial A = A \cup \{(0,0,0)\}$,

$\partial B = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\} \cup \{(x,y)\,|\,x^2+y^2=2\}$,

$\partial C = \{(x,y)\,\big|\,|x|=|y|\,\} = \{(x,y)\,\big|\,y=x\} \cup \{(x,y)\,\big|\,y=-x\}$,

B ist abgeschlossen und beschränkt.

C ist offen.

5. Aufgabe (7 Punkte)
Schnitte durch die Mantelfläche parallel zur $xy-$Ebene in der Höhe $z = h$ $(0 \leq h < 1)$ sind Ellipsen:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 - h$$
$$\iff (\frac{x}{2\sqrt{1-h}})^2 + (\frac{y}{3\sqrt{1-h}})^2 = 1$$

Für $h = 1$ ergibt sich der Punkt $(0, 0, 1)$.

Eine Parametrisierung der Mantelfläche ist somit:
$\vec{x}(h, \phi) = (2\sqrt{1-h}\cos\phi,\ 3\sqrt{1-h}\sin\phi,\ h)^T \quad h \in [0, 1], \quad \phi \in [0, 2\pi]$

Eine Parametrisierung der Grundfläche $(z = 0)$ ist:
$\vec{x}(r, \phi) = (2r\cos\phi,\ 3r\sin\phi,\ 0)^T \quad r \in [0, 1], \quad \phi \in [0, 2\pi]$

6. Aufgabe (4 Punkte)

a) falsch

b) falsch

c) wahr

d) wahr