TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 08/09
Fakultät II - Mathematik 06.04.09
Dozenten: Kato, Penn-Karras, Peters, Winkler
Assistent: Hartanto, Kulas, Nafalska

Musterlösung April-Klausur Rechenteil WS 08/09
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (10 Punkte)

Für $(x, y) \neq 0$ ist f partiell differenzierbar und in diesem Falle gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Für $(x, y) = 0$ ist f ebenfalls partiell differenzierbar, denn:
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$ und
$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h} = 1.$

2. Aufgabe (10 Punkte)

Da K kompakt und f stetig ist, werden Minimum und Maximum angenommen.
Wegen

$$\operatorname{grad}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2(x+1) \\ 2y \end{pmatrix}$$

ist $(-1, 0)$ ein kritischer Punkt im Inneren von K.
Untersuche noch f auf dem Rand, d.h. wir haben eine Extremwertaufgabe mit der Nebenbedigung $g(x, y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$.
Es ist

$$\operatorname{grad}_{(x,y)} g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Da $\operatorname{grad} g \neq 0$ auf dem Rand von K, tritt der singuläre Fall dort nicht auf.
Wir untersuchen also

$$\operatorname{grad}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2(x+1) \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \operatorname{grad}_{(x,y)} g, \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zusammen mit der Nebenbedingung haben wir also drei Gleichungen für x, y und λ:

$$(x+1) = \lambda x, \ y = \lambda y, \ x^2 + y^2 - 9 = 0.$$

Die zweite Gleichung ergibt $(1-\lambda)y = 0$, also $\lambda = 1$ oder $y = 0$.

Aus der ersten Gleichung sehen wir, dass $\lambda = 1$ nicht möglich ist. Also ergibt die dritte Gleichung $x = \pm 3$. Mit $\lambda = \frac{3\pm 1}{3}$ werden alle 3 Gleichungen gelöst. Die kritischen Punkte sind also $(\pm 3, 0)$ und $(-1, 0)$.

Ein Vergleich der Funktionswerte $f(-1, 0) = 0, f(3, 0) = 16, f(-3, 0) = 4$ liefert, daß in $(3, 0)$ das Maximum und in $(-1, 0)$ das Minimum von f auf K vorliegt.

3. Aufgabe (10 Punkte)

In Zylinderkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$ ist

$$T = \left\{ (r, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 2, \ 0 \leq z \leq 2, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Nach der Transformationsformel ist $dV = r\,dr\,d\phi\,dz$. Also wegen $x^2 + y^2 = r^2$

$$\iiint_T x^2 + y^2 \ dV = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^3 dr\, d\phi\, dz = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\tfrac{1}{4} r^4\right]_0^2 = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = 4\pi.$$

4. Aufgabe (10 Punkte)

Da die Flächenorientierung nicht vorgegeben ist, gilt

$$\iint_F \vec{v}(x,y,z)\cdot d\vec{O} = \pm \int_0^1 \int_0^2 \vec{v}(\vec{x}(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right) ds\, dt$$

Nun ist $\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -s \\ 1 \end{pmatrix}$ und somit erhält man

$$\vec{v}(\vec{x}(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial s} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right) = \begin{pmatrix} st \\ st \\ s^2+t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t \\ -s \\ 1 \end{pmatrix} = -st^2 - s^2t + s^2 + t^2.$$

Also folgt für das Integral

$$\begin{aligned}
\iint_F \vec{v}(x,y,z)\cdot d\vec{O} &= \pm \int_0^1 \int_0^2 -st^2 - s^2t + s^2 + t^2 \, ds\, dt \\
&= \pm \int_0^1 \left[-\frac{s^2t^2}{2} - \frac{s^3t}{3} + \frac{s^3}{3} + st^2 \right]_0^2 dt \\
&= \pm \int_0^1 -2t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{8}{3} + 2t^2 \, dt \\
&= \pm \frac{8}{3} \int_0^1 1 - t \, dt = \pm \frac{8}{3} \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \pm \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 08/09
Fakultät II - Mathematik 06.04.2009
Dozenten: Kato, Penn-Karras, Peters, Winkler
Assistent: Hartanto, Kulas, Nafalska

Musterlösung April-Klausur Verständnisteil WS 08/09 Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

a) Die Folge $\vec{x}_k$ divergiert, da z.B. $\lim_{k\to\infty}\cos(k\pi)$ nicht existiert. Anschaulich bewegen sich die Folgenglieder auf dem Einheitskreis.

b) Die Folge $\vec{y}_k$ konvergiert gegen $\vec{0}$, da $\lim_{k\to\infty}\frac{cos(k\pi)}{k}=0$ und $\lim_{k\to\infty}\frac{sin(k\pi)}{k}=0$ ist. Anschaulich bewegen sich die Folgenglieder spiralförmig auf den Ursprung zu.

c) Die Folge $\vec{z}_k$ konvergiert gegen $(1,0)$, da $(-1)^k\cos(k\pi)=1$ und $(-1)^k\sin(k\pi)=0$ für alle $k\in\mathbb{N}$ ist.

2. Aufgabe (12 Punkte)

Eine Antwort ohne Begründung gibt $\boxed{\text{0P}}$!

a) Da G kompakt und f auf G stetig ist (da f differenzierbar ist), hat f in G ein Minimum und ein Maximum. Befinden sich diese nicht auf dem Rand von G, so müssen sie im Inneren von G liegen. Eine notwendige Bedingung dafür ist die Existenz eines Punktes x_0 im Inneren von G mit $\operatorname{grad}_{x_0} f=\vec{0}$.

b) Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos(x)e^y,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sin(x)e^y$$

sind als Komposition stetiger Funktionen stetig. Also ist f (total) differenzierbar.

c) Der Gradient steht senkrecht auf den Niveaulinien. Wenn $(x,y)\in N_0$ ist, dann zeigt $\operatorname{grad} f(x,y)$ also in Richtung $\pm(x,y)$. Wegen $(x,y)\cdot(-y,x)=-xy+yx=0$, steht (x,y) und damit auch $\operatorname{grad} f(x,y)$ senkrecht auf $(-y,x)$.

d) Wir wählen für die Randkurve von F_1 und F_2 die gleiche Parametrisierung $\vec{\gamma}$. Nach dem Satz von Stokes ist

$$\iint_{F_1}\operatorname{rot}\vec{v}\cdot d\vec{O}=\int_{\vec{\gamma}}\vec{v}\cdot d\vec{s}=\iint_{F_2}\operatorname{rot}\vec{v}\cdot d\vec{O}.$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

- $\vec{P}_1$: Ist kein Extremalpunkt von f, da $\operatorname{grad} f(\vec{P}_1)=(0,0)$ ist und die Eigenwerte -3 und 5 von $H_f(\vec{P}_1)$ verschiedene Vorzeichen haben.
- $\vec{P}_2$: Dieser Punkt ist kein Extremalpunkt von f, da $\operatorname{grad} f(\vec{P}_2)\neq(0,0)$ ist.
- $\vec{P}_3$: Ist ein lokales Minimum von f, da $\operatorname{grad} f(\vec{P}_3)=(0,0)$ ist und der Eigenwert 1 von $H_f(\vec{P}_3)$ positiv ist.

4. Aufgabe (8 Punkte)

Da $-f$ das Potential zum Vektorfeld $\vec{v}=\operatorname{grad} f$ ist, kann das Integral direkt berechnet werden als Potentialdifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt der Kurve.

$$\int_{\vec{\gamma}}\vec{v}\,d\vec{s}=-f(0,0,0)+f(0,0,3)=6$$

5. Aufgabe

(8 Punkte)

Nach dem Satz von Gauß gilt:

$$\iiint\limits_{Z} \operatorname{div}\ \vec{v}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial Z} \vec{v}\, d\vec{O}.$$

Es gilt $\operatorname{div}\vec{v} = 1$ und damit

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\partial Z} \vec{v}\, d\vec{O} &= \iiint\limits_{Z} 1\, dx\, dy\, dz \\
&= \int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{2} 1r\, dr\, d\phi\, dz \\
&= 16\pi
\end{aligned}$$