Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 08/09
Kato, Penn-Karras, Peters, Winkler 06.04.2009

April – Klausur (Verständnisteil)
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe 6 Punkte

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an.

(a) $\vec{x}_k := (\cos(k\pi), \sin(k\pi))$ mit $k \in \mathbb{N}$,

(b) $\vec{y}_k := (\frac{1}{k}\cos(k\pi), \frac{1}{k}\sin(k\pi))$ mit $k \in \mathbb{N}$,

(c) $\vec{z}_k := ((-1)^k \cos(k\pi), (-1)^k \sin(k\pi))$ mit $k \in \mathbb{N}$.

2. Aufgabe 12 Punkte

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Geben Sie eine Begründung an oder finden Sie ein Gegenbeispiel, **ohne Begründung gibt es keine Punkte**!

(a) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und $f\colon G \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn in keinem Randpunkt von G ein globales Maximum oder Minimum von $f\colon G \to \mathbb{R}$ vorliegt, so gibt es einen Punkt $\vec{x}_0$ im Inneren von G mit $\operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f = \vec{0}$.

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sin(x)e^y$ ist differenzierbar.

(c) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und die Niveaulinie

$$N_0 f = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0 \,\}$$

ein Kreis um den Nullpunkt. Dann steht $\operatorname{grad}_{(x,y)} f$ für alle $(x, y) \in N_0 f$ senkrecht auf $(-y, x)$.

(d) Sei $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und seien F_1 und F_2 zwei glatte Flächen, mit gemeinsamer Randkurve. Dann gilt

$$\left| \iint_{F_1} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{O} \right| = \left| \iint_{F_2} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{O} \right|.$$

3. Aufgabe 6 Punkte

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. In den Punkten $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3 \in \mathbb{R}^2$ seien für den Gradienten $\operatorname{grad}_{\vec{P}_i} f$ und die Hesse–Matrix $\operatorname{Hess}_{\vec{P}_i} f$ der Funktion f die folgenden Werte gegeben:

	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$
$\operatorname{grad}_{\vec{P}_i} f$	$(0,0)^T$	$(2,0)^T$	$(0,0)^T$
$\operatorname{Hess}_{\vec{P}_i} f$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Geben Sie für jeden der drei Punkte $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ und $\vec{P}_3$ an, ob dort ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder kein Extremalpunkt von f vorliegt.

4. Aufgabe 8 Punkte

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = x + y + 2z$. Sei weiter $\vec{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ eine beliebige Schraubenlinie, die vom Punkt $(0,0,0)$ zum Punkt $(0,0,3)$ läuft.
Bestimmen Sie für $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ den Wert des Integrals

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{ds}.$$

5. Aufgabe 8 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -xy^2 \\ x^2\sin(z) + y \\ zy^2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie das Flussintegral von $\vec{v}$ durch die gesamte Oberfläche des Zylinderabschnitts

$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, |z| \leq 2\}.$$