TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SoSe 09
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften 20.07.09
Dozenten: Bärwolff, Garcke, Penn-Karras, Tröltzsch
Assistent: Dhamo, Döring, Sète

Musterlösung Juli-Klausur Rechenteil SoSe 09
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (9 Punkte)

Bestimmung der kritischen Punkte:

$$f'(x,y) = \left(3x^2 - 1 + y^2, 2xy\right) \overset{!}{=} (0,0)\,.$$

Aus der zweiten Komponente folgt $x = 0$ oder $y = 0$. Einsetzen in die erste Komponente liefert

$$x = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$
$$y = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Also existieren vier kritische Punkte:

$$\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{z}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{z}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Untersuchung mit hinreichendem Kriterium. Die Hessematrix ist

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$f''(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(f''(0,\pm 1)) = -4 < 0,$$

also sind $\vec{z}_1$ und $\vec{z}_2$ nur Sattelpunkte und keine lokalen Extrema.

$$f''(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},0) = \begin{pmatrix} \pm\frac{6}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(f''(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},0)) = 4 > 0.$$

Wegen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{z}_3) = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$, hat f in $\vec{z}_3$ ein lokales Minimum.
Wegen $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{z}_4) = -\frac{6}{\sqrt{3}} < 0$, hat f in $\vec{z}_4$ ein lokales Maximum. .

2. Aufgabe (10 Punkte)

Da D abgeschlossen und beschränkt ist, ist D kompakt. Als Polynom ist f stetig. Daher nimmt f auf der kompakten Menge D Minimum und Maximum an.
Wegen $f'(x,y) = (2x,-4) \neq (0,0)$ für alle (x,y), hat f keine Extremstellen im Inneren von D.
Extremstellen auf dem Rand: mit Lagrange. Nebenbedingung ist $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$.
Aufstellen der Gleichungssystems:

$$\begin{cases} \operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)2x = 0 \\ \lambda y = 2 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda = 1$ oder $x = 0$.
Aus $\lambda = 1$ folgt mit der zweiten Gleichung $y = 2$, mit der dritten dann $x = 0$.
Aus $x = 0$ folgt mit der dritten Gleichung $y = \pm 2$.
Also zwei kritische Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Es ist $f(0,2) = -8$ und $f(0,-2) = 8$. Da dies die einzigen kritischen Stellen sind, müssen es Minimum und Maximum sein.

3. Aufgabe

(5 Punkte)

Wähle die Parametrisierung

$$\gamma(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{ds} &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t)^2 - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\sin(t)\cos(t)^2 + \underbrace{\sin(t)^2 + \cos(t)^2}_{=1}\, dt \\
&= \left[\frac{1}{3}\cos(t)^3\right]_{t=0}^{2\pi} + 2\pi = 2\pi.
\end{aligned}$$

4. Aufgabe

(7 Punkte)

Es ist

$$\begin{aligned}
d\vec{O} &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\, dudv \\
&= \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u\sin(v) \\ u\cos(v) \\ 1 \end{pmatrix} dudv \\
&= \begin{pmatrix} \sin(v) \\ -\cos(v) \\ u \end{pmatrix} dudv.
\end{aligned}$$

Damit ist das Flussintegral

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \iint_{\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le u\le 1, 0\le v\le 2\pi\}} \vec{v}(\vec{x}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\right) dudv \\
&= \int_{u=0}^{1} \int_{v=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} 2u\sin(v) \\ -2u\cos(v) \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(v) \\ -\cos(v) \\ u \end{pmatrix} dvdu \\
&= \int_{u=0}^{1} \int_{v=0}^{2\pi} 2u + uv\, dvdu = \int_{u=0}^{1} 2\pi 2u + u\frac{1}{2}(2\pi)^2\, du \\
&= 2\pi\left[u^2\right]_{u=0}^{1} + \pi^2\left[u^2\right]_{u=0}^{1} = 2\pi + \pi^2.
\end{aligned}$$

5. Aufgabe (9 Punkte)

In Zylinderkoordinaten wird M beschrieben durch

$$\{(\rho, \varphi, z) | 0 \le z \le 2, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \rho \le 2 - z\} .$$

Mit dem Satz von Gauß folgt für das Flussintegral

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\partial M} \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \iiint\limits_{M} \operatorname{div}_{(x,y,z)} \vec{v} \, dxdydz \\
&= \iiint\limits_{M} 3x^2 + 3y^2 + (2-z)^2 \, dxdydz
\end{aligned}$$

in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_{z=0}^{2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\rho=0}^{2-z} \left(3\rho^2 + (2-z)^2\right) \rho \, d\rho d\varphi dz \\
&= 2\pi \int\limits_{z=0}^{2} \int\limits_{\rho=0}^{2-z} 3\rho^3 + (2-z)^2 \rho \, d\rho dz \\
&= 2\pi \int\limits_{z=0}^{2} \frac{3}{4} \left[\rho^4\right]_{\rho=0}^{2-z} + \frac{1}{2}(2-z)^2 \left[\rho^2\right]_{\rho=0}^{2-z} \, dz \\
&= 2\pi \int\limits_{z=0}^{2} \frac{3}{4}(2-z)^4 + \frac{1}{2}(2-z)^4 \, dz \\
&= 2\pi \frac{1}{4} \int\limits_{z=0}^{2} 5(2-z)^4 \, dz \\
&= \frac{\pi}{2} \left[-(2-z)^5\right]_{z=0}^{2} = \frac{\pi}{2} 2^5 = 16\pi.
\end{aligned}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SoSe 09
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften 20.07.09
Dozenten: Bärwolff, Garcke, Penn-Karras, Tröltzsch
Assistent: Dhamo, Döring, Sète

Musterlösung Juli-Klausur Verständnisteil SoSe 09
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

Es gibt je einen Punkt pro Antwort (keine Negativpunkte).

(i) falsch,

(ii) richtig,

(iii) richtig,

(iv) falsch,

(v) richtig,

2. Aufgabe (9 Punkte)

(i) Da $|\vec{v}| = 1$ gilt nach Definition $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = f'(1,1) \cdot \vec{v} = (2,2)^T \cdot (\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^T) = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

(ii) Die Richtungsableitung in Richtung $\vec{a}$ ist gegeben durch das Produkt der Ableitungsmatrix mit dem normierten Richtungsvektor Wir suchen also nach einem Vektor $\vec{a}$ der folgendes erfüllt:

$$f'(1,1) \cdot \vec{a} = 2,$$
$$|a| = 1.$$

Da $f'(1,1) = (2,2)$, bekommen wir die Gleichungen

$$2a_1 + 2a_2 = 2$$
$$a_1^2 + a_2^2 = 1.$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir $a_1 = 1 - a_2$ und einsetzen in die zweite Gleichung liefert $(1-a_2)^2 + a_2^2 = 1 - 2a_2 + 2a_2^2 = 1$ und damit $a_2 = 0$ oder $a_2 = 1$. Folglich ist dann $a_1 = 1$ oder $a_1 = 0$. Es kommen also nur die Richtungen entlang der Koordinatenachsen in Frage.

3. Aufgabe (10 Punkte)

Da $\vec{v}$ ein Potentialfeld mit Potential f ist , kann das Integral als Potentialdifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt der Kurve berechnet werden:

$$\begin{aligned}\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{ds} &= f(\vec{\gamma}(0)) - f(\vec{\gamma}(2\pi)) \\ &= f(0,0,1) - f(0,4\pi^2,1) \\ &= 0 - 8\pi^2.\end{aligned}$$

Da $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist, können wir eine beliebige Kurve wählen ohne dass sich das Kurvenintegral ändert . Eine direkte Verbindung ist gegeben durch

$$\vec{\beta}(t) = (0,0,1) + t(0,4\pi^2,0), t \in [0,1].$$

4. Aufgabe
(11 Punkte)

(i) Die angegebene Funktion parametrisiert die Fläche, die durch Rotation der Standard-Parabel um die y-Achse entsteht .

(ii) Um g zu minimieren müssen wir die Stelle der Fläche finden, die minimale z-Koordinate hat . Das ist offensichtlich $(0, 0, 0)$. Für Maximalstellen muss $g(x, y, z)$ maximal werden, also muss die z-Koordinate maximal sein. Das ist am oberen Ende der Fläche ($z = 15$) der Fall und zwar für alle (x, y) . Damit gibt es unendlich viele Maximalstellen. Der maximale Wert ist 15^2 .

(iii) Die Punkte auf dem entstehenden Paraboloiden sind gekennzeichnet durch die Eigenschaft, dass $z = x^2 + y^2$. Damit liegt die Fläche auf dem 0-Niveau der Funktion f .

5. Aufgabe
(5 Punkte)

Es gibt je einen Punkt pro Beispiel.

(i) Kreis (mit äusserem Rand) ohne Mittelpunkt,

(ii) $\vec{f}$ muss $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ abbilden: $\vec{f}(x, y) = (x^2 \sin(y), \frac{1}{3}y^3)^T$,

(iii) $f(x, y) = x + y$,

(iv) $\vec{f}(x, y) = \vec{0}$,

(v) Vollkreis in der xy-Ebene mit Parametrisierung $\vec{x}(r, \phi) = (r \cos(\phi), r \sin(\phi), 0)^T$, $r \in [0, 1]$, $\phi \in [0, 2\pi]$.