Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SoSe 09

Bärwolff, Garcke, Penn-Karras, Tröltzsch 20. Juli 2009

Juli – Klausur (Verständnisteil)
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe 5 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Notieren Sie Ihre Lösungen **ohne** Begründung auf einem separaten Blatt. Für eine richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für eine falsche verlieren Sie einen Punkt. Die minimale Punktzahl dieser Aufgabe beträgt 0.

(i) Es gibt keine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ die offen und abgeschlossen ist.

(ii) Stetige Funktionen auf einer Kreisscheibe (mit Rand) in $\mathbb{R}^2$ nehmen sowohl Maximum als auch Minimum an.

(iii) Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zeigt der Gradient in die Richtung des stärksten Anstiegs.

(iv) Das Kurvenintegral eines wirbelfreien differenzierbaren Vektorfeldes über eine geschlossene Kurve ist immer gleich 0.

(v) Für jede Kurve gibt es unendlich viele Parametrisierungen.

2. Aufgabe 9 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y^2$.

(i) Bestimmen Sie $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 1)$, wobei $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)^T$ ist.

(ii) In welchen Richtungen hat die Funktion f im Punkt $(1, 1)^T$ die Steigung 2?

3. Aufgabe 10 Punkte

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) = x^2 + 2y$. Sei weiter $\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ t^2 \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für $\vec{v} := -\mathrm{grad} f$ den Wert des Integrals

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{ds}.$$

Parametrisieren Sie eine weitere Kurve zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkt von γ und berechnen Sie das Kurvenintegral entlang dieser Kurve.

4. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben sei eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ durch die Parametrisierung

$$\Psi(\phi, t) = \begin{pmatrix} t\cos\phi \\ t\sin\phi \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \phi \in [0, 2\pi],\ t \in [0, 15]\ .$$

(i) Skizzieren Sie die Fläche.

(ii) Argumentieren Sie, dass die Funktion $g(x, y, z) = z$ auf der Fläche genau eine Minimalstelle und unendlich viele Maximalstellen besitzt. Welchen Wert nimmt g an den Maximalstellen an?

(iii) Weisen Sie nach, dass die Fläche auf dem 0-Niveau der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = z - x^2 - y^2,$$

liegt.

5. Aufgabe

5 Punkte

Geben Sie jeweils ein Beispiel **ohne** Begründung für die folgenden Objekte an:

(i) eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ die weder offen noch abgeschlossen ist,

(ii) eine Abbildung deren Ableitungsmatrix durch

$$\begin{pmatrix} 2x\sin(y) & x^2\cos(y) \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist,

(iii) ein Skalarfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, das kein Extremum auf der Geraden $y = 0$ annimmt,

(iv) ein divergenzfreies Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$,

(v) eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ (inklusive einer Parametrisierung), deren Randkurve ein Kreis in der xy-Ebene ist.