TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SoSe 09
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften 05.10.09
Dozenten: Bärwolff/Garcke/Penn-Karras/Tröltzsch
Assistent: Dhamo, Döring, Sète

Musterlösung Oktober-Klausur Rechenteil SoSe 09
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

Für die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ berechnet sich der Konvergenzradius aus $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Die Reihe konvergiert dann für alle $|x| < R$ und divergiert für alle $|x| > R$. Hier ist

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{2^n}{n+2}}{\frac{2^{n+1}}{n+3}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+3}{n+2} = \frac{1}{2},$$

Also konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Fall $x = -\frac{1}{2}$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+2} \frac{1}{(-2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+2}$. Die Folge $\frac{1}{n+2}$ ist streng monoton fallend und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0$. Damit konvergiert die Potenzreihe für $x = -\frac{1}{2}$ nach dem Leibnizkriterium.

Fall $x = \frac{1}{2}$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+2} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ ist divergent, da für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$:

$$\frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}.$$

Damit ist $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ eine divergente Minorante und die Potenzreihe für $x = \frac{1}{2}$ divergent.

2. Aufgabe (9 Punkte)

$f'(x, y) = (-\sin(x), 2y + 2) = (0, 0)$ ist erfüllt für $y = -1$ und $\sin(x) = 0 \Rightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Die Hessematrix ist

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt für die kritischen Punkte

$$f''(k\pi, -1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ falls } k \text{ gerade}, \quad f''(k\pi, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ falls } k \text{ ungerade}.$$

Im ersten Fall sind es somit Sattelpunkte, da $\det(f''(k\pi, -1)) < 0$. Im zweiten Fall lokale Minima mit $f(k\pi, -1) = -2$, da $\det(f''(k\pi, -1)) > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(k\pi, -1) > 0$.
Da $\cos(x) \geq -1$, kann f bzgl. x nicht kleiner werden als in den lokalen Minima. Weiterhin gilt $y(y+2) = (y+1)^2 - 1 \geq -1$, somit sind die lokalen Minima auch globale Minima.
f besitzt keine Maxima (weder lokal, noch global).

3. Aufgabe (7 Punkte)

Die Funktion f ist stetig auf $\mathbb{R}^2$ und die Menge M ist kompakt. Daher besitzt f auf M mind. ein globales Minimum und Maximum. Die Nebenbedingung lautet

$$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0\,.$$

Wir untersuchen zunächst den singulären Fall:

$$\begin{cases} \operatorname{grad}_{(x,y)^T} g = \vec{0} \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix} = \vec{0} \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 8y = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0\,. \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt keine Lösung, da aus den ersten beiden Gleichungen folgt, dass $x = y = 0$, folglich $0 - 4 = 0$, was falsch ist.

Aufstellen des Gleichungssystems im regulären Fall:

$$\begin{cases} \operatorname{grad}_{(x,y)^T} f = \lambda \operatorname{grad}_{(x,y)^T} g \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix} \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 2y = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0\,. \end{cases}$$

Fall 1: $x = 0$. Dann folgt aus der 3. Gleichung, dass $y = \pm 1$. In beiden Fällen folgt dann aus der 2. Gleichung : $\lambda = \frac{1}{4}$.
Fall 2: $x \neq 0$. Aus der 1. Gleichung folgt $\lambda = 1$. In die 2. Gleichung eingesetzt, ergibt dies: $y = 0$. Aus der 3. Gleichung folgt schließlich: $x = \pm 2$.
Die einzigen Kandidaten für Extrema sind also $(0, \pm 1)^T$ und $(\pm 2, 0)^T$ mit den Funktionswerten $f(0, \pm 1) = 1$ und $f(\pm 2, 0) = 4$.
Damit nimmt f (auf M) in $(0, \pm 1)^T$ globale Minima und in $(\pm 2, 0)^T$ globale Maxima an.

4. Aufgabe (8 Punkte)

Zu (i): (qualitativ, Schnittpunkte)
Zu (ii): Wir unterteilen zunächst die Menge M in M^+ und M^+, wobei $M^+ = M_1^+ \cup M_2^+$ mit $M_1^+ = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le \frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{4}x \le y \le 4x\}$ und $M_2^+ = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{1}{2} \le x \le 2\,,\ \frac{1}{4}x \le y \le \frac{1}{x}\}$. Analog dazu $M^- = M_1^- \cup M_2^-$ mit $M_1^- = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,|\, -\frac{1}{2} \le x \le 0\,,\ 4x \le y \le \frac{1}{4}x\}$ und $M_2^- = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,|\, -2 \le x \le -\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{x} \le y \le \frac{1}{4}x\}$. Dann gilt $M = M^+ \cup M^-$,

$$\begin{aligned} \iint\limits_{M^+} dxdy &= \int_0^{1/2} \int_{x/4}^{4x} dydx + \int_{1/2}^{2} \int_{x/4}^{1/x} dydx = \int_0^{1/2} x(4 - \frac{1}{4})\,dx + \int_{1/2}^{2} \left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{4}x\right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2(4 - \frac{1}{4})\right]_0^{1/2} + \left[\ln(x) - \frac{1}{8}x^2\right]_{1/2}^{2} = \frac{15}{32} + 2\ln(2) - \frac{15}{32} = 2\ln(2)\,, \end{aligned}$$

$\iint\limits_{M^+} dxdy = \iint\limits_{M^-} dxdy$, also $\iint\limits_{M} = 4\ln(2)$.

5. Aufgabe (8 Punkte)

Es ist

$$d\vec{O} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\,dudv = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dudv = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} dudv\,.$$

Dann gilt nach Definition des Flußintegrals

$$\begin{aligned} \int_F \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2uv \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} dudv \\ &= -\int_0^{2\pi} \int_0^{2} \{1 + 2uv\}\,dudv \\ &= -\int_0^{2\pi} \left[u + u^2 v\right]_{u=0}^{u=2} dv \\ &= -\int_0^{2\pi} \{2 + 4v\}\,dv = -\left[2v + 2v^2\right]_0^{2\pi} = -8\pi^2 - 4\pi\,. \end{aligned}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SoSe 09
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften 05.10.09
Dozenten: Bärwolff/Garcke/Penn-Karras/Tröltzsch
Assistent: Dhamo, Döring, Sète

Musterlösung Oktober-Klausur Verständnisteil SoSe 09
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

Pro richtige Antwort: +; pro falsche Antwort: −. Die *minimale* Punktzahl dieser Aufgabe beträgt 0.

(i) falsch,

(ii) falsch,

(iii) falsch,

(iv) richtig,

(v) falsch.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Die Funktion ist differenzierbar und damit auch stetig in den Punkten mit $y > 1$ und $y < 1$, denn in diesen offenen Mengen handelt es sich um eine konstante Funktion. In x-Richtung ist g überall partiell differenzierbar, da g partiell konstant ist. In y-Richtung ist g genau für $y \neq 1$ partiell differenzierbar. Für $y \neq 1$ ist g lokal konstant und für $y = 1$ ist g nicht partiell stetig. Dies kann folgenderweise gezeigt werden: Wäre g partiell stetig in $(x, 1)^T$, so müsste $g(x, y_n) = g(x, 1)$ gelten für jede Folge y_n die gegen 1 konvergiert. Wähle wir aber zum Beispiel $y_n = 1 - 1/n$, so konvergiert (x, y_n) gegen den Punkt $(x, 1)$ aber $g(x, y_n) = -5$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $\lim_{n\to\infty} g(x, y_n) = -5 \neq 5 = g(x, y)$ Dies beweist auch die Unstetigkeit in Punkten mit $y = 1$. $g'(x, y)$ ist der Nullvektor für all $(x, y)^T$ mit $y \neq 1$. Für $(x, 1)^T$ ist g nicht stetig und damit auch nicht differenzierbar.
Ableitungsmatrix für $y \neq 1$: $g'(x, y) = (0, 0)$.

3. Aufgabe (10 Punkte)

zu 1.: Da $\mathbb{R}^3$ konvex ist, ist die Bedingung $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ ausreichend für die Existenz eines Potenzials.

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ \lambda x \cos(x^2) - 2x \cos(x^2) \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda - 2)x \cos(x^2) \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \lambda = 2\,.$$

zu 2.: Sei also $\lambda = 2$. Gesucht ist eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass $\operatorname{grad}_{(x,y,z)} \Phi = \vec{v}(x, y, z)$, also

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, z) = 2xz \cos(x^2) + y\,,\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, z) = x \text{ und } \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, z) = \sin(x^2) + 2z\,.$$

Die erste Gleichung ergibt

$$\Phi(x, y, z) = z \sin(x^2) + yx + c(y, z)\,.$$

Einsetzen in die 2. Gleichung liefert

$$x + \frac{\partial c}{\partial y}(y, z) = x\,,$$

folglich ist c unabhängig von y, $c(y, z) = c(z)$. Daraus folgt mit der 3. Gleichung schließlich

$$\sin(x^2) + c'(z) = \sin(x^2) + 2z \Rightarrow c(z) = z^2 + C \quad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Eine Stammfunktion von $\vec{v}$ ist $\Phi(x, y, z) = z \sin(x^2) + yx + z^2$.

zu 3.: Zunächst gilt $\vec{c}(0) = \vec{0}$ und $\vec{c}(1) = (0, 1, 1)^T$. Mit Φ aus (ii) folgt dann

$$\int_c \vec{v} \cdot \vec{ds} = \Phi(\vec{c}(1)) - \Phi(\vec{c}(0)) = \Phi(0, 1, 1) - \Phi(0, 0, 0) = 1 - 0 = 1\,.$$

4. Aufgabe (10 Punkte)

1. Es handelt sich um eine Kreisscheibe in der xy-Ebene um den Mittelpunkt $(1, 0, 0)$ mit Radius 1.
2. Eine Parametrisierung ist gegeben durch $\vec{x}(r, \phi) = (r\cos(\phi) + 1, r\sin(\phi), 0)^T$ mit $r \in [0, 1], \phi \in [0, 2\pi]$. Damit ist das vektorielle Oberflächenelement gegeben als

$$d\vec{O} = \cos(\phi), \sin(\phi), 0)^T \times (-r\sin(\phi), r\cos(\phi), 0)^T drd\phi = (0, 0, r)^T drd\phi\,.$$

3. Um mit dem Satz von Stokes (für den Satz) das Kurvenintegral über den Kreis zu berechnen, berechnen wir das Flussintegral über F der Rotation von $\vec{v}$. Die Rotation ist gegeben durch

$$\text{rot}\,\vec{v}(x, y, z) = (0, 0, -2)^T\,.$$

Damit ist aber das Flussintegral $\int_F \vec{v}\cdot d\vec{O} \neq 0$ und somit nach Stokes das Kurvenintegral ungleich null.

5. Aufgabe (5 Punkte)

Es gibt je einen Punkt pro Beispiel.

(i) abgeschlossene Einheitskugel,

(ii) $\vec{a}_n = (n, n, n)^T$,

(iii) $f(x, y) = -x$,

(iv) $f(x, y) = 1$,

(v) $f(x, y) = 1$.