Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SoSe 09

Bärwolff, Garcke, Penn-Karras, Tröltzsch 05. Oktober 2009

Oktober – Klausur (Verständnisteil)
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen

sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe

5 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Notieren Sie Ihre Lösungen **ohne** Begründung auf einem separaten Blatt. Für eine richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für eine falsche verlieren Sie einen Punkt. Die minimale Punktzahl dieser Aufgabe beträgt 0.

1. Konvexe Mengen sind immer offen.
2. Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nimmt immer ein globales Maximum an.
3. Ist $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)^T$ und die Determinante der Hesseschen Matrix an der Stelle $(0,0)^T$ negativ, so hat f an der Stelle $(0,0)^T$ ein lokales Maximum.
4. Nimmt eine auf $\mathbb{R}^2$ stetige Funktion f im Inneren des Vollkreises um $(0,0)^T$ mit Radius 1 kein Maximum an, so nimmt f ein Maximum unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 - 1 = 0$ an.
5. Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen und $\vec{v}\colon D \to \mathbb{R}^3$. Dann folgt aus $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$, dass $\vec{v}$ auf ganz D ein Potential besitzt.

2. Aufgabe

10 Punkte

Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist durch

$$g(x,y) = \begin{cases} 5 & \text{falls } y \geq 1, \\ -5 & \text{falls } y < 1 \end{cases}$$

gegeben.

1. Für welche Punkte $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ ist g stetig bzw. unstetig?
2. Für welche Punkte $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ existieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$?
3. Für welche Punkte $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ ist g differenzierbar bzw. nicht differenzierbar?

Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie die Ableitungsmatrix, für die Punkte in denen Sie existiert, an.

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad v(x,y,z) = \big(\lambda xz\cos(x^2) + y,\ x,\ \sin(x^2) + 2z\big)^T\,.$$

1. Wie ist die Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ zu wählen, damit $\vec{v}$ ein Potential besitzt?
2. Bestimmen Sie für die unter 1. gefundenen Werte für λ eine Stammfunktion von $\vec{v}$.
3. Bestimmen Sie für die unter 1. gefundenen Werte für λ das Kurvenintegral von $\vec{v}$ entlang der Kurve

$$\vec{c}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{c}(t) = \big(\sin(\pi t),\ 2t^2 - t,\ te^{t^2-t}\big)^T\,.$$

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist die Fläche $F = \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 0, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

1. Skizzieren Sie F.
2. Parametrisieren Sie die Fläche F und bestimmen Sie das vektorielle Oberflächenelement.
3. Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y - 2x \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes, dass

   $\displaystyle\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{ds} \neq 0$ gilt, wobei $\vec{\gamma}$ die Randkurve von F ist.

5. Aufgabe

5 Punkte

Geben Sie jeweils ein Beispiel **ohne** Begründung für

1. eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ die konvex und kompakt ist,
2. eine nicht-konvergente Folge $(\vec{a}_n)$ in $\mathbb{R}^3$,
3. eine stetige Funktion von $\left\{(x, y)^T : x^2 + y^2 < 2\right\}$ nach $\mathbb{R}$, die kein Minimum annimmt,
4. eine Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ die unendlich viele Maximalstellen hat,
5. eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx dy = 1$,

an.