TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 09/10
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften 15.02.2010
Dozenten: D. Hömberg, M. Karow, J. Suris
Assistent: V. Dhamo, N. Hartanto, A. Volpato

Musterlösung Februar-Klausur Rechenteil WS 09/10
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

Für ein Potential u von $\vec{f}$ muss gelten $\operatorname{grad} u = -\vec{f}$.

Aus der ersten Zeile folgt

$$u(x,y,z) = -\int ye^{xy} + z^2\,dx = -e^{xy} - xz^2 + c_1(y,z).$$

Ableitung von u nach y ergibt

$$-xe^{xy} - \frac{1}{y} = \frac{\partial u}{\partial y} = -xe^{xy} + \frac{\partial c_1}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial c_1}{\partial y} = -\frac{1}{y} \Leftrightarrow c_1(y,z) = -\ln y + c_2(z),$$

also $u(x,y,z) = -e^{xy} - xz^2 - \ln y + c_2(z)$. Ableitung von u nach z ergibt

$$-2xz = \frac{\partial u}{\partial z} = -2xz + \frac{\partial c_2}{\partial z} \Leftrightarrow \frac{\partial c_2}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow c_2(z) = c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Also ist für jedes $c \in \mathbb{R}$

$$u(x,y,z) = -e^{xy} - xz^2 - \ln y + c$$

ein Potential von $\vec{f}$.

2. Aufgabe (7 Punkte)

(a) Der maximale offene Definitionsbereich von f ist $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z > 0\}$.

(b) Die partielen Ableitungen lauten

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \sqrt{y}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

Somit ergibt sich die Jacobimatrix zu

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 0 \\ \sqrt{y} & \frac{x}{2\sqrt{y}} & \frac{1}{2\sqrt{z}} \end{bmatrix}.$$

(c) Die partiellen Ableitungen sind auf dem Definitionsbereich D von $\vec{f}$ alle stetig. Daraus folgt, dass $\vec{f}$ total differenzierbar ist.

3. Aufgabe

(9 Punkte)

(a) Bestimmung der kritischen Punkte durch überprüfen der notwendigen Bedingung $\operatorname{grad} f = \vec{0}$. Also

$$\operatorname{grad} f = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2} - 4 \\ -\frac{1}{y^2} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

d.h.

$$\frac{1}{x^2} = 4 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{y^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$$

Als kritische Punkte erhält mensch also

$$\vec{P}_1 = (1/2, 1), \qquad \vec{P}_2 = (1/2, -1), \qquad \vec{P}_3 = (-1/2, 1), \qquad \vec{P}_4 = (-1/2, -1)$$

Bestimme zur Überprüfung der hinreichenden Bedingung die Hessematrix $f''(x, y)$ von f:

$$f''(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{y^3} \end{bmatrix}.$$

Damit ist

$$f''(\vec{P}_1) = \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \to \text{indefinit} \qquad f''(\vec{P}_2) = \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \to \text{negativ definit}$$

$$f''(\vec{P}_3) = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \to \text{positiv definit} \qquad f''(\vec{P}_4) = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \to \text{indefinit}$$

Damit hat f ein lokales Maximum bei $\vec{P}_2 = (1/2, -1)$ und ein lokales Minimum bei $\vec{P}_3 = (-1/2, 1)$.

(b) Beispielsweise gilt für festes $y \neq 0$ dass $\lim_{x \to \pm\infty} f(x, y) = \mp\infty$. Deshalb kann f kein globales Minimum und auch kein globales Maximum besitzen.

4. Aufgabe

(9 Punkte)

(a) 1. Möglichkeit: mit Zylinderkoordinaten.

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{bmatrix} \mid 0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq r \leq 2 - z \right\}, \qquad M = \left\{ \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{bmatrix} \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

und damit

$$K \setminus M = \left\{ \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{bmatrix} \mid 0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq r \leq 2 - z,\ \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi \right\}.$$

2. Möglichkeit: mit kartesischen Koordinaten. Zerlege $K \setminus M$ in zwei Teilmengen, einmal mit $y \leq 0$ und einmal mit $y \geq 0$:

$$K \setminus M = \left\{ (x, y, x)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1,\ -2 + z \leq y \leq 0,\ -\sqrt{(2-z)^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{(2-z)^2 - y^2} \right\}$$
$$\cup \left\{ (x, y, x)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2 - z,\ -\sqrt{(2-z)^2 - y^2} \leq x \leq 0 \right\}.$$

(b) In Zylinderkoordinaten: Die Funktionaldeterminante ist r.

$$V = \iiint_{K \setminus M} dx\,dy\,dz = \int_{\pi/2}^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2-z} r\,dr\,dz\,d\varphi = \frac{3\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{2}(2-z)^2 dz$$
$$= \frac{3\pi}{4} \int_0^1 z^2 - 4z + 4\,dz = \frac{3\pi}{4} \left[\frac{z^3}{3} - 2z^2 + 4z \right]_0^1 = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7\pi}{4}.$$

5. Aufgabe

(9 Punkte)

(a) Eine Parametrisierung lässt sich mit Hilfe von Zylinderkoordinaten finden.

$$\vec{u}(r,\varphi) = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \ln r + 1 \end{bmatrix}, \quad r \in [1,2],\ \varphi \in [0, 2\pi]$$

(b) Das vektorielle Oberflächenelement ergibt sich aus der Parametrisierung zu

$$d\vec{O} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial r}\, dr\, d\varphi = \begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1/r \end{bmatrix} dr\, d\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -r \end{bmatrix} dr\, d\varphi.$$

(Dies zeigt von der z-Achse weg.)

Weiter ist

$$\vec{v}(\vec{u}(r,\varphi)) = \begin{bmatrix} er^2\cos\varphi \\ er^2\sin\varphi \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Somit ergibt sich für den gesuchten Fluss

$$\begin{aligned}
\iint_F \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \vec{v}(\vec{u}(r,\varphi)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial r} \right) dr\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \begin{bmatrix} er^2\cos\varphi \\ er^2\sin\varphi \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -r \end{bmatrix} dr\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^2 er^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - 2r\, dr\, d\varphi \\
&= 2\pi \left(e \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 - \left[r^2 \right]_1^2 \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{7}{3}e - 3 \right).
\end{aligned}$$

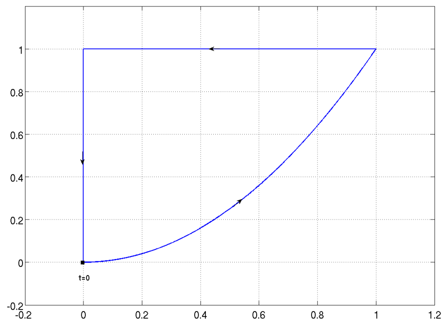
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 09/10
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften 15.02.2010
Dozenten: D. Hömberg, M. Karow, J. Suris
Assistent: V. Dhamo, N. Hartanto, A. Volpato

Musterlösung Februar-Klausur Verständnisteil WS 09/10
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (9 Punkte)

(a)



(b) $\vec{F} = (F1, F2)$ ist ein Potentialfeld, denn $\mathbb{R}^2$ ist konvex und die notwendige Bedingung $1 = \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1$ ist erfüllt. Also existiert ein $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $\vec{F} = -\text{grad}\, g$ und

$$\int_{\vec{c}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = g(\vec{c}(0)) - g(\vec{c}(3)) \,.$$

Da aber $\vec{c}(0) = \vec{c}(3)$ (geschlossene Kurve), folgt $\int_{\vec{c}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$.

2. Aufgabe (8 Punkte)

(a) Wir verwenden hier den Integralsatz von Gauß:

$$\iint\limits_{\partial Z} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \iiint\limits_{Z} \text{div}\vec{v}\; dxdydz \,.$$

Zunächst gilt

$$\text{div}\vec{v}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(-3xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3 - (x-2)y) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = -3y^2 + 3y^2 - (x-2) + x = 2 \,.$$

Somit

$$\iint\limits_{\partial Z} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \iiint\limits_{Z} 2\; dxdydz = 2\text{vol}(Z) = 2 \cdot 12\pi = 24\pi \,.$$

(b) $P_1 = (0,0,0)$ liegt auf dem “unteren Deckel” von Z, deshalb $\vec{n}_{P_1} = (0,0,-1)$.
$P_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ liegt auf der Mantelfläche von Z, deshalb $\vec{n}_{P_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$. (Der Winkel zur xz-Ebene ist $\pi/4$!)
$P_3 = (1,-1,3)$ liegt auf dem “oberen Deckel” von Z, deshalb $\vec{n}_{P_3} = (0,0,1)$.

3. Aufgabe (8 Punkte)

Punkt für die richtige Antwort mit (einer) Begründung & Punkt für die richtige Begründung/das richtige Gegenbeispiel.

(a) Wahr. $\vec{0} \notin D \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y\}$, obwohl die Vektoren $(-1/2, 0)$ und $(1/2, 0)$ in $D \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y\}$ liegen.

(b) Falsch. Betrachte die Funktion $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2$. Der einzige kritische Punkt ist $(0,0,0)$. Die Hessematrix lautet

$$f''(x,y,z) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

folglich $\det f''(0,0,0) < 0$ aber in $(0,0,0)$ liegt ein lok. Maximum vor.

(c) Wahr. Nach Definition gilt $\nabla f \cdot \vec{u} = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = 0$ und $\nabla f \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$. Also stehen die normierten Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ senkrecht auf $\nabla f \neq \vec{0}$. Somit liegen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auf einer Geraden / sind linear abhängig, also $\vec{u} = \pm \vec{v}$.

(d) Wahr. Da ∂D eine geschlossene Fläche ist, gilt nach dem Satz von Stokes

$$\iint_{\partial D} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{O} = 0\,.$$

4. Aufgabe (9 Punkte)

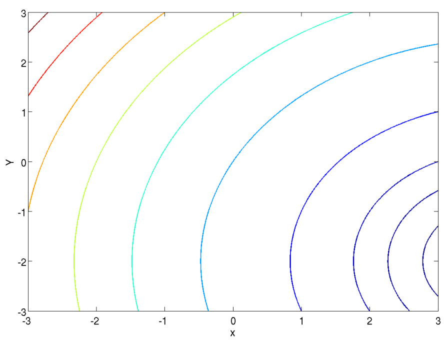
(a) f ist stetig und D kompakt, daher besitzt f (mind.) ein globales Minimum und Maximum auf D.

(b) Das notwendige Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremwertes von f im Inneren von D ist $\operatorname{grad} f = \vec{0}$, also

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \operatorname{grad} f(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2(x-4) \\ 2(y+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{a}\,.$$

Jedoch $\vec{a} \notin D$, folglich besitzt f keine kritischen Punkte auf D.

(c) Die Niveaulinien von f sind konzentrische Kreise mit Mittelpunkt in $\vec{a}$, eingeschränkt auf D.



(d) f beschreibt das Quadrat des Abstands von $\vec{x}$ zum Punkt $\vec{a}$. Man beachte, dass das Quadrat des Abstands genau dann minimal/maximal ist, wenn der Abstand minimal/maximal ist. Deshalb ist das Minimum von f der minimale Abstand von D zu $\vec{a}$. Dieses Minimum wird folglich in $(3,-2)$ angenommen. Analog, liegt das Maximum von f in $(-3,3)$.

5. Aufgabe (6 Punkte)

(a) Da f π-periodisch ist, hat ihr 2010-te Fourierpolynom folgende Gestalt

$$\phi_{2010}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{2010} a_k \cos(2kx) + b_k \sin(2kx)\,.$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt $a_0 = 2$, $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ und $b_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Wegen $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(2kx)\,dx$, folgt sofort, dass

$$\int_0^\pi f(x)\sin(6x)\,dx = \frac{\pi}{2}b_3 = \frac{\pi}{2}\frac{(-1)^3}{(3+1)^2} = -\frac{\pi}{32}\,.$$

(b) f ist weder gerade, noch ungerade, denn z.B. $a_0 \neq 0$ und $b_1 \neq 0$ (s. auch Teil (i)).