Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 09/10
D. Hömberg, M. Karow, J. Suris 15. Februar 2010

Februar – Klausur (Verständnisteil)
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe 9 Punkte

Gegeben seien das Vektorfeld

$$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad \vec{F}(x,y) = \begin{bmatrix} xe^{x^2} + y \\ y^5 + x \end{bmatrix}$$

und die Kurve $\vec{c} : [0,3] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\vec{c}(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} & \text{falls } 0 \le t < 1\,, \\ \begin{bmatrix} 2-t \\ 1 \end{bmatrix} & \text{falls } 1 \le t < 2\,, \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 3-t \end{bmatrix} & \text{falls } 2 \le t \le 3\,. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie $\vec{c}$.

(b) Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals $\displaystyle\int_{\vec{c}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

2. Aufgabe 8 Punkte

Gegeben sei der Zylinder $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \le 4, 0 \le z \le 3\}$ und das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{bmatrix} -3xy^2 \\ y^3 - (x-2)y \\ xz \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie den Wert des Flußintegrals $\displaystyle\iint_{\partial Z} \vec{v} \cdot d\vec{O}$. Verwenden Sie dabei einen geeigneten Integralsatz.

(b) Geben Sie den nach außen weisenden Einheitsnormalenvektor jeweils in den Punkten $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ und $P_3 = (1,-1,3)$ an.

3. Aufgabe 8 Punkte

Sind die folgenden Aussagen **immer** wahr? Geben Sie zusätzlich zu Ihrer Antwort immer eine **ausführliche** Begründung oder ein Gegenbeispiel an. Für Antworten ohne Begründung gibt es keine Punkte.

a) $D \subset \mathbb{R}^2$ sei die offene Einheitskreisscheibe mit Mittelpunkt $(0,0)$. Dann ist die Menge $D \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y\}$ nicht konvex.

b) Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gelte $\operatorname{grad}_{\vec{x}_0} f = \vec{0}$ und $\det f''(\vec{x}_0) < 0$. Dann hat f in $\vec{x}_0$ kein lokales Extremum.

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Es gelte $\operatorname{grad}_{(x,y)} f \neq \vec{0}$ und $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$ für zwei Vektoren $\vec{u},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$. Dann gilt $\vec{u} = \pm\vec{v}$.

d) Sei D der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$. Dann ist der Fluß der Rotation eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch die Randfläche ∂D gleich Null.

4. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben seien $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ und die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \quad f(\vec{x}) = |\vec{x} - \vec{a}|^2\,,$$

wobei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -3 \leq x \leq 3\,, -3 \leq y \leq 3\}$.

(i) Zeigen Sie, dass f (mind.) ein globales Minimum und Maximum auf D besitzt.

(ii) Begründen Sie, warum f keine lokale Extremwerte im Inneren von D besitzt.

(iii) Skizzieren Sie die Niveaulinien von f.

(iv) Bestimmen Sie das globale Maximum/Minimum von f auf D.

5. Aufgabe

6 Punkte

Sei

$$\phi_{2010}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{2010} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \sin(2kx)$$

das 2010-te Fourierpolynom einer π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \sin(6x)\, dx$.

(ii) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?