TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 09/10
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften 06.04.2010
Dozenten: D. Hömberg, M. Karow, G. Penn-Karras, J. Suris
Assistent: V. Dhamo, N. Hartanto, D. Heldt

Musterlösung April-Klausur Rechenteil WS 09/10
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

Es ist $\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ e^y - \cos x \sin y - e^y + \cos x \sin y \end{bmatrix} = \vec{0}$.

Der Definitionsbereich von $\vec{v}$ ist ganz $\mathbb{R}^3$ und somit konvex. Also besitzt $\vec{v}$ ein Potential.

Berechne das Potential u von $\vec{v}$. Sei $\vec{v}(x,y,z) = \begin{bmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{bmatrix}$. Integriere v_1 nach x.

$$u(x,y,z) = -\int e^y + \cos x \cos y dx = -xe^y - \sin x \cos y + c_1(y,z).$$

Es muss gelten $\frac{\partial u}{\partial y} = -v_2(x,y,z)$, also

$$-xe^y + \sin x \sin y + \frac{\partial c_1}{\partial y}(y,z) = -xe^y + \sin x \sin y \Rightarrow \frac{\partial c_1}{\partial y}(y,z) = 0 \Rightarrow c_1(y,z) = c_1(z).$$

Wegen $\frac{\partial u}{\partial z} = -v_3(x,y,z)$ folgt

$$\frac{\partial c_1}{\partial z}(z) = -z \Rightarrow c_1(z) = -\frac{z^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}\ .$$

Somit ist $u(x,y,z) = -(xe^y + \sin x \cos y + \frac{z^2}{2}) + c,\ c \in \mathbb{R}$ ein Potential von $\vec{v}$.

Alternativ kann statt dem Rotationsargument auch an dieser Stelle die Begründung für die Existenz von u stehen.

2. Aufgabe

(8 Punkte)

(a) (i) Umstellen nach z ergibt $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + xy - y,\ x \in [0,1],\ y \in [-1,3]\}$.

Somit ist eine mögliche Parametrisierung

$$\vec{x}_1(s,t) = \begin{bmatrix} s \\ t \\ s^2 + st - t \end{bmatrix}, \quad s \in [0,1],\ t \in [-1,3].$$

(ii) In Kugelkoordinaten ist $F_2 = \{ \begin{bmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{bmatrix} \mid r = 3,\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \vartheta \in [0,\pi]\}$.

Als Parametrisierung erhlält mensch somit beispielsweise

$$\vec{x}_2(s,t) = \begin{bmatrix} 3\cos s\sin t \\ 3\sin s\sin t \\ 3\cos t \end{bmatrix}, \quad s \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ t \in [0,\pi].$$

(b) Zunächst gilt $\frac{\partial\vec{x}}{\partial s} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -2s \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -s\sin t \\ s\cos t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s^2\cos t \\ 2s^2\sin t \\ s \end{bmatrix}$.

Damit ergibt sich das Flussintegral zu:

$$\begin{aligned}
\iint_F \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \vec{v}(x(s,t), y(s,t), z(s,t)) \cdot (\frac{\partial\vec{x}}{\partial s} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial t})\, ds\, dt \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \begin{bmatrix} s\sin t \\ s\cos t \\ 4 - s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2s^2\cos t \\ 2s^2\sin t \\ s \end{bmatrix} ds\, dt \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 4s^3\sin t\cos t + 4s - s^3\, ds\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[s^4\sin t\cos t + 2s^2 - \frac{s^4}{4} \right]_0^2 dt \\
&= 16 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin t\cos t\, dt}_{=0} + 4\int_0^{2\pi} dt = 8\pi.
\end{aligned}$$

(Wenn mit $\frac{\partial\vec{x}}{\partial t} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial s}$ gerechnet wurde, ist auch -8π richtig.)

3. Aufgabe

(8 Punkte)

(a) für die Skizze, für die Schnittpunkte.

(b) Eine Bereichsbeschreibung für B ist

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 2 \text{ und } x^2 \le y \le x + 2\}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\iint_B 2y + 1 dydx &= \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} 2y + 1 dydx \\
&= \int_{-1}^2 \left[y^2 + y\right]_{x^2}^{x+2} dx \\
&= \int_{-1}^2 x^2 + 4x + 4 + x + 2 - x^4 - x^2 dx \\
&= \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{2}x^2 + 6x \right]_{-1}^2 \\
&= -\frac{32}{5} + 10 + 12 - \frac{1}{5} - \frac{5}{2} + 6 \\
&= 20 - \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = 20 - \frac{6+5}{10} = 18 + \frac{9}{10}.
\end{aligned}$$

4. Aufgabe

(8 Punkte)

(a) Die Funktion f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$ und $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ist kompakt. Also besitzt f in D ein globales Minimum und Maximum.

(b) Da f im Inneren von D zwei mal stetig differenzierbar ist (und das Innere von D offen), finden wir alle möglichen Extrema im Inneren von D mit der hinreichenden Bedingung. Daher reicht es, alle (x, y) mit $\operatorname{grad}(f)(x, y) = 0$ zu untersuchen. Wir erhalten $\operatorname{grad}(f) = (-8x, 2y - 12)$, also ist $(0, 6)$ der einzige kritische Punkt. Allerdings ist $(0, 6) \notin D$ und somit hat f keine lokalen Extrema im Inneren von D.

(c) Da D kompakt ist und f zwei mal stetig differenzierbar im Inneren von D und stetig auf ∂D können wir f auf globale Extrema auf ∂D mit dem Lagrange–Ansatz untersuchen. Dabei gilt

$$\begin{aligned} \partial D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 25\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0 \text{ mit } g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 25\}. \end{aligned}$$

Wir suchen zunächst kritische Punkte der Form $g(x, y) = 0$ und $\operatorname{grad}(g)(x, y) = \vec{0}$. Dabei ist $\operatorname{grad}(g) = (8x, 2y)$ und somit ist $(0, 0)$ der einzige mögliche kritische Punkt. Allerdings ist $g(0, 0) = 25 \neq 0$ und somit bleibt kein kritischer Punkt dieser Gestalt.
Nun suchen wir kritische Punkte der Form $\lambda \operatorname{grad}(g) = \operatorname{grad}(f)$, also Lösungen von

$$\begin{aligned} 8\lambda x &= -8x \\ 2\lambda y &= 2y - 12 \end{aligned}$$

unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$. Dabei ergibt sich aus der ersten Gleichung, dass entweder $x = 0$ oder $\lambda = -1$ gelten muss. Im ersten Fall ergibt sich aus der Nebenbedingung dann $y \in \{-5, 5\}$. Im zweiten Fall ergibt sich mit der zweiten Gleichung

$$4y = 12,$$

also $y = 3$ und damit wieder mit der Nebenbedingung $x \in \{-2, 2\}$. Wir erhalten also die kritischen Punkte $(0, -5), (0, 5), (-2, 3), (2, 3)$. Einsetzen in f ergibt dann (zusammen mit der Begründung in (a) und dem Fehlen von lokalen Extrema im Inneren von D) ein globales Maximum in $(0, -5)$ ($f(0, -5) = 121$) und Minima in den Punkten $(-2, 3), (2, 3)$ ($f(-2, 3) = f(2, 3) = -7$).

5. Aufgabe

(8 Punkte)

Die Funktion f ist zweimal stetig differenzierbar mit

$$f'(x, y) = -\begin{bmatrix} (1 + xy)e^{xy} & x^2 e^{xy} \end{bmatrix}, \quad f''(x, y) = -\begin{bmatrix} y(2 + xy)e^{xy} & (2x + x^2 y)e^{xy} \\ (2x + x^2 y)e^{xy} & x^3 e^{xy} \end{bmatrix}.$$

In $\vec{x}_0 = (1, 0)$ haben wir

$$f(1, 0) = -1, \quad f'(1, 0) = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad f''(1, 0) = -\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f mit dem Entwicklungspunkt $\vec{x}_0$ lautet dann

$$\begin{aligned} T_2 f_{(1,0)}(x, y) &= f(1, 0) + f'(1, 0) \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x - 1 & y - 0 \end{bmatrix} f''(1, 0) \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{bmatrix} \\ &= -1 - (x - 1) - y - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x - 1 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2y \\ 2(x - 1) + y \end{bmatrix} \\ &= -x - y - \frac{1}{2} \left(2(x - 1)y + 2y(x - 1) + y^2\right) = -x + y - 2xy - \frac{1}{2} y^2. \end{aligned}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 09/10
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften 06.04.2010
Dozenten: D. Hömberg, M. Karow, G. Penn-Karras, J. Suris
Assistent: V. Dhamo, N. Hartanto, D. Heldt

Musterlösung April-Klausur Verständnisteil WS 09/10
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

Wir verwenden hier den Integralsatz von Stokes

$$\int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{ds} = \iint_D \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{dO} \,,$$

wobei die Fläche D so parametrisiert werden muss, dass das vektoriele Oberflächenelement $\vec{dO}$ nach "oben" zeigt. Wir wählen als Parametrisierung von D die folgende Abbildung

$$\Phi(u,v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } u \in [-1,1] \text{ und } v \in [-2,2] \,.$$

Dann gilt

$$\vec{dO} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right)(u,v)\, dudy = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dudv \,.$$

Mit $\operatorname{rot} \vec{v}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ erhalten wir schließlich

$$\int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{ds} = \iint_D \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{dO} = \int_{-2}^{2} \left(\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} du \right) dy = 16 \,.$$

2. Aufgabe (8 Punkte)

(a) Da $\mathbb{R}^3$ konvex ist , besitzt $\vec{v}_{a,k}$ ein Potential wenn die Bedingung

$$\operatorname{rot} \vec{v}_{a,k}(x,y,z) = \begin{bmatrix} z - akz^{k-1} \\ x - akx^{k-1} \\ y - aky^{k-1} \end{bmatrix} = \vec{0}$$

erfüllt ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $a = \frac{1}{2}$ und $k = 2$.

(b) Aus Teil (a) wissen wir, dass $\vec{v}_{\frac{1}{2},2}$ ein Potentialfeld ist, d.h. es existiert $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass $\vec{v}_{\frac{1}{2},2} = -\operatorname{grad} g$. Ausserdem gilt

$$\int_{\vec{c}} \vec{v}\, \vec{ds} = g(\vec{c}(0)) - g(\vec{c}(1)) \,.$$

Da aber $\vec{c}(0) = \vec{c}(1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ erhalten wir schließlich $\int_{\vec{c}} \vec{v}\, \vec{ds} = 0$.

3. Aufgabe (8 Punkte)

Punkt für die richtige Antwort mit (einer) Begründung & Punkt für die richtige Begründung/das richtige Gegenbeispiel.

(a) Es gilt $\operatorname{rot}(\vec{v}+\operatorname{grad} h) = \operatorname{rot}\vec{v}+\operatorname{rot}(\operatorname{grad} h)$. Das Vektorfeld $\vec{v}$ ist laut Aufgabenstellung ein Potentialfeld, also $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$. $\operatorname{grad} h$ ist offenbar ebenfalls ein Potentialfeld, es hat ja das Potential $-h$. Also gilt auch $\operatorname{rot}\operatorname{grad} h = \vec{0}$. (*Alternativ kann auch benutzt werden, dass* $\operatorname{rot}\operatorname{grad} h$ *immer verschwindet.*) Also ist die Aussage richtig.

(b) (K ist sicherlich beschränkt.) Weiter ist $\partial K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \max(|x|,|y|,|z|) = 1\} \cup \{\vec{0}\}$. Da aber laut Aufgabenstellung $\vec{0} \notin K$ ist, ist K nicht abgeschlossen und somit auch nicht kompakt. Die Aussage ist also falsch.

(c) Die Aussage ist falsch. Für $t = 1$ ist die erste Zeile eine Nullzeile und damit die Matrix höchstens semidefinit. Für $t \in (\frac{1}{2}, 1)$ sind alle drei Diagonaleinträge negativ. Damit hat die Matrix drei negative Eigenwerte, bzw. das Signum der Hauptminoren alterniert, also ist die Matrix sogar negativ definit.

(d) Die Aussage ist wahr.

Variante 1: Nach dem Integralsatz von Gauß gilt: $\iint_{\partial K} \vec{v}\cdot d\vec{O} = \pm\iiint_K \operatorname{div}\vec{v}\,dxdydz$. Aus $\operatorname{div}\vec{v} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{w} = 0$ folgt die Richtigkeit der Aussage.
Variante 2: Der Rand von ∂K ist leer. Damit folgt nach dem Integralsatz von Stokes: $\iint_{\partial K} \vec{v}\cdot d\vec{O} = \pm\int_{\partial(\partial K)} \operatorname{rot}\vec{v}\,d\vec{s} = 0$.

4. Aufgabe (8 Punkte)

(a) Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest und $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen $(0, y)$ konvergente Folge mit $x_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus der Beschränktheit von sin, $|\sin(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{R}$, dass

$$|f(x_k, y_k) - 0| = \left| x_k y_k \sin\left(\frac{1}{x_k}\right)\right| \leq |x_k y_k| \to 0 \text{ für } k \to \infty\,.$$

Somit lässt sich f zu einer stetigen Funktion $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen und

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} xy\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

(b) Falls der Grenzwert $\lim_{t\to 0}(\tilde{f}(0+t,1) - \tilde{f}(0,1))/t$ existiert, dann existiert $\partial\tilde{f}/\partial x$ und ist gleich diesem Grenzwert. Es gilt aber, dass

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tilde{f}(0+t,1) - \tilde{f}(0,1)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t\sin\left(\frac{1}{t}\right) - 0}{t} = \lim_{t\to 0}\sin\left(\frac{1}{t}\right) \text{ divergent}\,.$$

Damit existiert $\partial\tilde{f}/\partial x$ nicht und folglich ist $\tilde{f}$ nicht differenzierbar. Die partielle Ableitung $\partial\tilde{f}/\partial y$ existiert und ist gleich

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tilde{f}(0,1+t) - \tilde{f}(0,1)}{t} = 0\,.$$

5. Aufgabe (8 Punkte)

Variante 1: Es ist offensichtlich $a_k = 0$ für alle $k = 0, 1, 2, \ldots$ und da $T = 2\pi \Rightarrow \omega = 1$ ist, folgt $b_k = \frac{4}{k\pi}$ für alle $k = 1, 2, \ldots$
Man erhält $\tilde{f}$, indem f auf der y-Achse um eins nach unten verschoben wird. Das Fourierpolynom $\tilde{\phi}_n$ von $\tilde{f}$ muss also relativ zu ϕ_n ebenfalls um eins nach unten verschoben sein (ϕ_n und $\tilde{\phi}_n$ sind Approximationen an f und $\tilde{f}$.) Also ist

$$\tilde{\phi}_n(x) = \phi_n(x) - 1 = -1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k\pi}\sin(k\pi x).$$

Die Fourierkoeffizienten von $\tilde{\phi}_n$ sind also $\tilde{a}_0 = -2$, $\tilde{a}_k = a_k = 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots$ und $\tilde{b}_k = b_k = \frac{4}{k\pi}$ für alle $k = 1, 2, \ldots$

Variante 2: Es ist offensichtlich $a_k = 0$ für alle $k = 0, 1, 2, \ldots$ und da $T = 2\pi \Rightarrow \omega = 1$ ist, folgt $b_k = \frac{4}{k\pi}$ für alle $k = 1, 2, \ldots$
Die Periode von $\tilde{f}$ ist ebenfalls 2π, da f nur verschoben wurde, damit ist auch $\tilde{\omega} = 1$. Berechne die Koeffizienten $\tilde{a}_k$ und $\tilde{b}_k$ für $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}\tilde{b}_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(x)-1)\sin(kx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(kx)dx \\ &= b_k + 0 = \frac{4}{k\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{a}_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(x)-1)\cos(kx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(kx)dx \\ &= a_k + 0 = 0\end{aligned}$$

Und zu guter letzt:

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) - 1\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx = a_0 - \frac{2\pi}{\pi} = -2.$$