Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 09/10
D. Hömberg, M. Karow, G. Penn-Karras, J. Suris 06. April 2010

April – Klausur (Verständnisteil)
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe

8 Punkte

Sei $\vec{c}$ eine von "oben" gesehen mathematisch positiv orientierte Parametrisierung des Randes der ebenen Fläche $D = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$. und das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{bmatrix} y \\ 3x \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Stokes das Kurvenintegral $\displaystyle\int_{\vec{c}} \vec{v} \cdot \vec{ds}$.

2. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben seien Konstanten $a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und das Vektorfeld

$$\vec{v}_{a,k} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}_{a,k}(x,y,z) = \begin{bmatrix} xz + ay^k \\ xy + az^k \\ yz + ax^k \end{bmatrix} .$$

(a) Wie sind die Konstanten a und k zu wählen, damit $\vec{v}_{a,k}$ ein Potential besitzt?

(b) Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals von $\vec{v}_{\frac{1}{2},2}$ entlang der Kurve

$$\vec{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{c}(t) = \begin{bmatrix} 3e^{t^2-t} \\ 4 \\ \sin(\pi t) \end{bmatrix} .$$

3. Aufgabe

8 Punkte

Sind die folgenden Aussagen **immer** wahr? Geben Sie zusätzlich zu Ihrer Antwort immer eine **ausführliche** Begründung oder ein Gegenbeispiel an. Für Antworten ohne Begründung gibt es keine Punkte.

(a) Sei $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig partiell differenzierbares Potentialfeld. Dann gilt für jede zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\operatorname{rot}(\vec{v} + \operatorname{grad} h) = \vec{0} .$$

(b) Sei $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \mid x,y,z \in [-1,1]\}$. Dann ist K kompakt.

(c) Die Matrix

$$A_t = \begin{bmatrix} \sin(-\pi t) & 0 & 0 \\ 0 & t^2 - t & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi t) \end{bmatrix}$$

ist für alle $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ positiv definit.

(d) Sei $\vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit stetigen zweiten partiellen Ableitungen und $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{w}$. Außerdem sei $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt. Dann gilt $\displaystyle\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot d\vec{O} = 0$.

4. Aufgabe 8 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = xy\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass f sich zu einer stetigen Funktion $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen lässt und bestimmen Sie $\tilde{f}$.

(b) Untersuchen Sie $\tilde{f}$ im Punkt $(0,1)$ auf partielle und totale Differenzierbarkeit.

5. Aufgabe 8 Punkte

Sei für $n \in \mathbb{N}$

$$\phi_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}$$

das n-te Fourierpolynom einer 2π periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie sämtliche Fourierkoeffizienten von $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x) = f(x) - 1$.