Juli-Klausur
Analysis II für Ingenieure
Lösungsskizzen (Rechenteil)

1. Aufgabe 6 Punkte

Die Funktionalmatrix ist

$$\vec{f}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(xy^2) + xy^2\cos(xy^2) & 2x^2y\cos(xy^2) \\ \frac{2x}{(1+x^2)(1+y^2)} & -\frac{2y\ln(1+x^2)}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe 7 Punkte

Es ist $\operatorname{grad}_{(x,y)} f = (3x^2 - 2y^2,\ -4xy+1)^T$ und $\operatorname{grad}_{(1,0)} f = (3\ 1)^T$.
Die Richtung des größten Anstiegs im Punkt $P\,(1,0)$ ist somit $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Für die Richtungsableitung von f im Punkt $(1,\,0)$ in Richtung
$\vec{a} = (\frac{1}{\sqrt{5}},\, \frac{2}{\sqrt{5}})$ erhält man $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(1,\,0) = \operatorname{grad}_{(1,0)} f \cdot \vec{a} = \frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.
Die Gleichung der Tangentialebene ist
$T_p(x,\,y) = f(1,\,0) + \operatorname{grad}_{(1,0)} f \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} = -6 + 3(x-1) + y = 3x + y - 9.$

3. Aufgabe 11 Punkte

$\operatorname{grad} f = \vec{0}$ liefert das Gleichungssystem

$$y + 1 = 0$$
$$x = 0$$

Einziger kritischer Punkt ist somit $(0,\,-1)$

Es ist $\det H_{(x,y)} f = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$

Im Punkt $(0,\,-1)$ hat die Funktion folglich einen Sattelpunkt.
Da D kompakt und f stetig ist, nimmt f auf D einen größten Funktionswert an.
Weil f keine lokalen Extrema hat, wird dieser größte Wert auf dem Rand ∂D angenommen.
Es ist $\operatorname{grad} g = \vec{0}$ nur für $(x,\,y) = (0,\,0) \notin \partial B$.

$\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$ und die Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ ergeben das Gleichungssystem:

$y + 1 = \lambda 2x$
$x = \lambda 2y$
$x^2 + y^2 = 1$

Die zweite Gleichung in die erste eingesetzt ergibt: $y(1 - 4\lambda^2) = -1$.
somit ist $1 - 4\lambda^2 \neq 0$.
Man erhält $\quad y = \frac{-1}{1-4\lambda^2}$
und aus der 2. Gl. $x = \frac{-2\lambda}{1-4\lambda^2}$.
Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt:
$1 + 4\lambda^2 = (1 - 4\lambda^2)^2 \iff 4\lambda^2(-3 + 4\lambda^2 = 0) \iff \lambda = 0$ oder $\lambda \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Kritische Punkte sind somit $(0, -1)$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

Der Vergleich ergibt:

$f(0, -1) = -1$
$f(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{3} - 1$ (Maximum)
$f(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}\sqrt{3} - 1$

4. Aufgabe 8 Punkte

Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten erhält man für das Volumen:
$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r^2} r\,dzdrd\phi = 2\pi\int_0^1 (r - r^3)dr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

5. Aufgabe 8 Punkte

Für $\vec{x}(r, \phi) = (r\cos\phi,\, r\sin\phi,\, 1 - r^2)^T$ errechnet man
$\frac{\partial\vec{x}}{\partial r} = (\cos\phi,\, \sin\phi,\, -2r)^T, \quad \frac{\partial\vec{x}}{\partial\phi} = (-r\sin\phi,\, r\cos\phi,\, 0)^T$,
$\frac{\partial\vec{x}}{\partial r} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial\phi} = (2r^2\cos\phi,\, 2r^2\sin\phi,\, r)^T$,

$$\iint_B \vec{v}\cdot d\vec{O} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ r\sin\phi(1-r^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2r^2\cos\phi \\ 2r^2\sin\phi \\ r \end{pmatrix} drd\phi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \sin\phi(r^2 - r^4)\,drd\phi = \Big[-\cos\phi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.$$