TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2010
Fakultät II - Mathematik 07.10.2010
Dozenten: Bärwolff/Böse/Kato/Penn-Karras
Assistenten: Böse, Neitzel

Lösungsskizzen Oktober-Klausur Rechenteil SS 2010
Analysis II für Ingenieure

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

Es gilt $\dot{\vec{c}}(t) = (\cos t,\, -\sin t,\, 1)^T$ und $|\dot{\vec{c}}(t)| = \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
\text{Länge}(\vec{c}) &= \int_{\vec{c}(t)} 1 d\vec{s} = \int_0^{2\pi} |\dot{\vec{c}}(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi. \\
\int_{\vec{c}(t)} f d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} f(\vec{c}(t)) |\dot{\vec{c}}(t)| dt = \int_0^{2\pi} (\sin t + t)\sqrt{2} dt = \cdots = 2\sqrt{2}\pi^2. \\
\int_{\vec{c}(t)} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(c(t)) \cdot \dot{\vec{c}}(t) dt = \int_0^{2\pi} (1,\, \cos t,\, t) \cdot (\cos t,\, -\sin t, 1) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \cos t - \sin t \cos t + t\, dt = (\sin t - \frac{1}{2}\sin^2 t + \frac{1}{2}t^2)|_0^{2\pi} = 2\pi^2.
\end{aligned}$$

2. Aufgabe (8 Punkte)

Die Funktion f ist zweimal stetig differenzierbar und es gilt:

$$f'(x,y) = (y\sin(xy),\, x\sin(xy)), \quad f'(1,\pi) = (0,\, 0),$$

$$\text{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2\cos(xy) & \sin(xy) + xy\cos(xy) \\ \sin(xy) + xy\cos(xy) & x^2\cos(xy) \end{pmatrix}, \quad \text{Hess}_f(1,\pi) = \begin{pmatrix} -\pi^2 & -\pi \\ -\pi & -1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
T_{[f,(1,\pi)]}(x,y) &= f(1,\pi) + f'(1,\pi)(x-1, y-\pi)^T + \frac{1}{2}(x-1, y-\pi)\text{Hess}_f(1,\pi)(x-1,y-\pi)^T \\
&= 1 - \frac{1}{2}(x-1, y-\pi)\begin{pmatrix} \pi^2 & \pi \\ \pi & 1 \end{pmatrix}(x-1, y-\pi)^T \\
&= 1 - \frac{1}{2}(\pi^2(x-1)^2 + (y-\pi)^2) - \pi(x-1)(y-\pi)
\end{aligned}$$

3. Aufgabe (8 Punkte)

a) Es gilt

$$\nabla f = (-2xye^{-x^2-y^2},\, (1-2y^2)e^{-x^2-y^2})^T$$

und

$$\text{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2} & -2x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2} \\ -2x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2} & -2y(3-2y^2)e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

Aus $\nabla f = \vec{0}$ ergeben sich die kritischen Punkte

$$(x_0, y_0) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \quad (x_1, y_1) = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Weiter gilt

$$\det \text{Hess}_f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \det \begin{pmatrix} -\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = 4e^{-1} = \det \begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \det \text{Hess}_f(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Mit $\partial_{xx} f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) < 0$ und $\partial_{xx} f(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) > 0$ folgt also: Die Funktion f nimmt im Punkt $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ein lokales Minimum an, und in $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ein lokales Maximum.

b)

$$\begin{aligned}\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y) &= \lim_{\rho\to\infty} f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi) = \lim_{\rho\to\infty} \rho e^{-\rho^2}\sin\phi \\ &= 0, \text{ wegen } \sin\phi \text{ beschränkt (und } \rho e^{-\rho^2} \to 0)\end{aligned}$$

4. Aufgabe

(8 Punkte)

Die Gerade durch die Punkte $(0,0)$ und $(1,1)$ ist $g_1(x) = x$, und die Gerade durch die Punkte $(1,1)$ und $(2,0)$ ist $g_2(x) = 2-x$. Der Integrationsbereich B hat dann die Darstellung

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x \le 2,\, 0 \le y \le 2-x\}$$

$$\iint\limits_B y dx dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^x y dy dx + \int\limits_1^2 \int\limits_0^{2-x} y dy dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}x^2 dx + \int\limits_1^2 \frac{1}{2}(2-x)^2 dx = \frac{1}{6}x^3\Big|_0^1 - \frac{1}{6}(2-x)^3\Big|_1^2 = \frac{1}{3}$$

Alternativ:

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le 1,\, y \le x \le 2-y\}$$

$$\iint\limits_B y dx dy = \int\limits_0^1 \int\limits_y^{2-y} y dx dy = \int\limits_0^1 (2y - 2y^2) dy = y^2 - \frac{2}{3}y^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

5. Aufgabe

(8 Punkte)

a) div $\vec{v} = 6x\sin y + ze^x - x^3\sin y$, rot $\vec{v} = (0-0, e^x - e^x, 3x^2\cos y - 3x^2\cos y)^T = (0,0,0)^T$.

b) Nach a) gilt rot $\vec{v} = 0$, damit ist die notwendige Potentialbedingung erfüllt. Da $\mathbb{R}^3$ konvex ist, ist diese Bedingung auch hinreichend, es existiert also ein Potential . Gesucht ist eine Funktion $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\nabla u = -\vec{v} = \begin{pmatrix} -3x^2\sin y - ze^x \\ -x^3\cos y - 1 \\ -e^x \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) = -3x^2\sin(y) - ze^x$$

folgt

$$u(x,y,z) = -x^3\sin(y) - ze^x + c_1(y,z).$$

Dann folgt mit

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) = -x^3\cos y + \frac{\partial c_1}{\partial y}(y,z) = -x^3\cos y - 1$$

folgt, dass $\frac{\partial c_1}{\partial y}(y,z) = -1$ ist, also $c_1(y,z) = -y + c_2(z)$ und $u(x,y,z) = -x^3\sin y - ze^x - y + c_2(z)$. Aus

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = -e^x + \frac{\partial c_2}{\partial z}(z) = -e^x$$

folgt schließlich

$$\frac{\partial c_2}{\partial z}(z) = 0.$$

also $c_2(z) = c$ und

$$u(x,y,z) = -x^3\sin y - ze^x - y + c$$

für beliebiges $c \in \mathbb{R}$.