Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 2010
Bärwolff, Böse, Kato, Penn-Karras 07.10.2010

Oktober – Klausur (Verständnisteil)
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **60 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe 8 Punkte

Geben Sie für jede der folgenden Mengen explizit an, welche der Eigenschaften

konvex, offen, abgeschlossen, beschränkt

die Menge hat und welche der Eigenschaften sie nicht hat. Eine Begründung ist nicht erforderlich.

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}, \qquad B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = z^2\}$$
$$C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = y\}, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq y < 1\}$$

2. Aufgabe 11 Punkte

a) Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

auf Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit in $(0,0)$. Geben Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ an, falls diese existieren.

b) Nun sei für $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^a}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

gegeben. Untersuchen Sie für die Fälle

i) $a > 2$ und ii) $0 < a < 2$,

ob g auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

3. Aufgabe 8 Punkte

Geben Sie (mit Begründung) Vektorfelder $\vec{v}_i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $i = 1, \ldots, 4$ mit folgenden Eigenschaften an:

a) Es existiert kein Potential für $\vec{v}_1$.

b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v}_2)) = 0$.

c) $\vec{v}_3$ ist stetig, aber nicht differenzierbar.

d) $\vec{v}_4$ ist ein Potentialfeld.

4. Aufgabe 7 Punkte

Gegeben seien die Vektorfelder $\vec{v}, \vec{w}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x,y,z) = (3x,\, 0,\, 0)^T, \quad \vec{w}(x,y,z) = (x,\, y,\, z)^T.$$

Weiterhin sei

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ mit Rand

$$S = \partial K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes:

$$\iint\limits_S \vec{v} \cdot d\vec{O} = \iint\limits_S \vec{w} \cdot d\vec{O}.$$

5. Aufgabe 6 Punkte

Parametrisieren Sie die Rotationsfläche, die im $\mathbb{R}^3$ entsteht, wenn die Kurve

$$\vec{c}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{c}(t) = (t, 0, t^3)^T$$

um die z-Achse rotiert.