Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 10/11
Böse, von Renesse, Stephan, Weiser 28.02.2011

Februar – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Beachten Sie ferner, dass nicht angemeldete Klausuren ebenfalls nicht gewertet werden.

Die Klausur besteht aus zwei Teilen, einem Rechen- und einem Verständnisteil. Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

6	7	8	9	10	11	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 5 Punkte

(a) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \neq (0, 0)\} \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \frac{-x}{x^2 + y^2}.$$

(b) Gegeben seien das Vektorfeld

$$\vec{v} : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \neq (0, 0)\} \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \\ z^2 \end{pmatrix}$$

und die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$.

2. Aufgabe 11 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy(x + y - 1)$.

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und entscheiden Sie, ob es sich jeweils um ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder einen Sattelpunkt handelt.

(b) Hat f auf $\mathbb{R}^2$ ein globales Minimum?

3. Aufgabe 9 Punkte

(a) Skizzieren Sie die kompakte Menge $M \subset \mathbb{R}^2$, welche durch die Kurven $y = \frac{4}{x}$, $y = 4x^2$ und $y = 2$ begrenzt wird.

(b) Berechnen Sie

$$\iint_M xy dx dy.$$

4. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben sei $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v}(x, y, z) = (x^3 z + xy^2 z, y^3 z + e^x z - yz^3, z^4 - \frac{1}{2} y^2 z^2)^T$ und $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x, y, z \geq 0\}$. Berechnen Sie

$$\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot d\vec{O}.$$

Hinweis: Satz von Gauss, Kugelkoordinaten.

5. Aufgabe 5 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = (0, 1, x+y)^T,$$

und die Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$ mit der Parametrisierung

$$f(u,v) = (u, u+v, uv)^T, \quad u, v \in [0,1].$$

Berechnen Sie das Flußintegral

$$\iint_F \vec{v} \cdot d\vec{O}.$$

Verständnisteil

6. Aufgabe 6 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Notieren Sie Ihre Lösungen **ohne** Begründung auf einem separaten Blatt. Für eine richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für eine falsche verlieren Sie einen Punkt. Nicht beantwortete Fragen werden auch nicht gewertet. Die minimale Punktzahl dieser Aufgabe beträgt 0.

(a) Die Menge $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = z\}$ ist weder offen noch abgeschlossen.

(b) Die Funktion $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x, y) = 1$, nimmt ein globales Maximum an.

(c) Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v}(x, y, z) = (e^{x+y+z}, y, 1)$. Dann ist $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{v}$ auch ein Vektorfeld.

(d) Jede Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}_{(0,0)} f = (0, 0)^T$ und $\det \operatorname{Hess}_{(0,0)} f > 0$ hat an der Stelle $(0, 0)^T$ ein lokales Minimum.

(e) Die Funktion $f : \{(x, y) \in R^2 \,|\, x \cdot y \neq 0\} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = |x| \cdot |y|$ ist differenzierbar.

(f) Das Kurvenintegral von Vektorfeldern der Form $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}_0$ mit $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^d$ ist wegunabhängig.

7. Aufgabe 6 Punkte

Geben Sie jeweils ein Beispiel **ohne** Begründung für

(a) eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ die konvex und offen ist,

(b) eine Folge von offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, deren Durchschnitt nur den Nullpunkt $(0, 0)$ enthält,

(c) eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\int_0^1 \int_0^2 f(x, y)dxdy = 1$,

(d) eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die unendlich viele Sprungstellen hat,

(e) eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die im Punkt $(1, 1)$ stetig aber nicht differenzierbar ist,

(f) ein Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit Potential $u(x, y, z) = xyz$.

an.

8. Aufgabe 6 Punkte

Skizzieren Sie die Fläche $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1, z \in [0, 1]\}$ und geben Sie eine Parametrisierung an.

9. Aufgabe 6 Punkte

Bestimmen Sie das skalare Flächenintegral $\iint_{\mathcal{F}} f \cdot dO$ für die Fäche

$$\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

und die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = z^3(x^2 + y^2)$.
Hinweis: Zerlegen Sie das Integationsgebiet unter Verwendung der Tatsache, dass

$$(-z)^3 = -z^3.$$

10. Aufgabe 6 Punkte

Gegeben sei eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} e^{x^2} \\ 2y \end{pmatrix}$ sowie die Abbildung

$$\vec{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ 3x + 2y \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie $\operatorname{grad}_{(0,1)} h$ für die Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h = f \circ \vec{g}$.

11. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben seien der Vektor $\vec{a} = (3,4)^T$ und die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \vec{a} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

definiert auf dem Gebiet $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le y \le 1 - x^2\}$.

(a) Begründen Sie, warum f mindestens ein globales Minimum und Maximum auf D besitzt.

(b) Begründen Sie, warum f keine lokalen Minima und Maxima im Inneren von D besitzt.

(c) Skizzieren Sie D und die Niveaulinien von f.

(d) Bestimmen Sie das globale Minimum von f und begründen Sie, weshalb es kein weiteres globales Minimum gibt.
Hinweis: Sie dürfen bei dieser Teilaufgabe geometrisch argumentieren z.B. unter Verwendung von (c).