Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Böse, von Renesse, Stephan, Weiser

WS 10/11
28.02.2011

Februar – Klausur
Analysis II für Ingenieure
Musterlösung

<u>Rechenteil</u>

1. Aufgabe

5 Punkte

(a)

$$\nabla f = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} -(x^2+y^2)+2x^2 \\ 2xy \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(2 Punkte)}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\sin^2 t+\cos^2 t)^2}\begin{pmatrix} \cos^2 t-\sin^2 t \\ 2\cos t\sin t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\cos^2 t-1 \\ 2\cos t\sin t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-2\sin t\cos^2 t+\sin t+2\cos^2 t\sin t+t^2)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sin t\,dt + \int_0^{2\pi} t^2\,dt = 0+\frac{1}{3}t^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\pi^3 \qquad \text{(3 Punkte)}
\end{aligned}$$

Intelligenter:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\begin{pmatrix} v_1(\gamma(t)) \\ v_2(\gamma(t)) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3(\gamma(t)) \end{pmatrix} \right) \cdot \dot{\gamma}(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} v_1(\gamma(t)) \\ v_2(\gamma(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\gamma}(t)dt + \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \dot{\gamma}(t)dt \\
&= f(\gamma(2\pi))-f(\gamma(0)) + \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\sin^2 t+\cos^2 t)^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= 0+\int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{8}{3}\pi^3 \qquad \text{(3 Punkte)}
\end{aligned}$$

2. Aufgabe 11 Punkte

(a)

$$\text{grad} f = \begin{pmatrix} y(x+y-1)+xy \\ x(x+y-1)+xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(2x+y-1) \\ x(x+2y-1) \end{pmatrix}$$

$\text{grad} f = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad y(2x+y-1) = 0,\ \ x(x+2y-1) = 0.$ (1 Punkt)
Für $(x,y) \neq (0,0)$ erhält man : $2x+y=1,\ \ x+2y=1$ mit der Lösung $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
Für die Fälle $x=0$ und/oder $y=0$ erhält man
die Lösungen $(0,1),\ (1,0),\ (0,0)$. (2 Punkte)

Hessematrix: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y-1 \\ 2x+2y-1 & 2x \end{pmatrix}$

$\det H_f(x,y) = 4xy - (2x+2y-1)^2$ (2 Punkte)

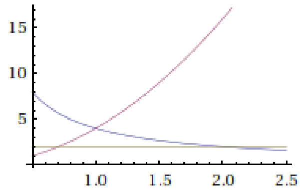
Es ist $\det H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{2}{3} > 0$.
Folglich hat f in $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ein lokales Minimum. (2 Punkte)

Es ist $\det H_f(0,1) = \det H_f(1,0) = \det H_f(0,0) = 0 - 1 < 0$
In $(0,1),(1,0)$ und $(0,0)$ liegen daher Sattelpunkte vor. (2 Punkte)

(b) f hat auf $\mathbb{R}^2$ kein globales Minimum, denn
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3 - x^2) = -\infty$ (2 Punkte)

3. Aufgabe 9 Punkte

(a) (3 Punkte)



(b) $(1,4)$, $(2,2)$ und $(\sqrt{\frac{1}{2}}, 2)$ sind die Schnittpunkte der drei Kurven. M ist gegeben durch

$$\begin{aligned} M &= \{(x,y) | \sqrt{\frac{1}{2}} \leq x \leq 2,\ y \geq 2,\ y \leq \frac{4}{x},\ y \leq 4x^2\} \\ &= \{(x,y) | \sqrt{\frac{1}{2}} \leq x \leq 1,\ 2 \leq y \leq 4x^2\} \cup \{(x,y) | 1 \leq x \leq 2,\ 2 \leq y \leq \frac{4}{x}\}. \qquad (2\,Punkte) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \iint\limits_M xydxdy &= \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1} \int_2^{4x^2} xydydx + \int_1^2 \int_2^{\frac{4}{x}} xydydx & (1\,Punkt) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1} x(16x^4 - 4)dx + \frac{1}{2} \int_1^2 x(\frac{16}{x^2} - 4)dx \\ &= \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1} (8x^5 - 2x)dx + \int_1^2 (\frac{8}{x} - 2x)dx & (1\,Punkt) \\ &= (\frac{4}{3}x^6 - x^2)\Big|_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1} + (8\ln x - x^2)\Big|_1^2 \\ &= \frac{4}{3}(1 - \frac{1}{8}) - (1 - \frac{1}{2}) + 8(\ln 2 - \ln 1) - (4 - 1) = -\frac{7}{3} + 8\ln 2. & (2\,Punkte) \\ &\approx 3.211 \end{aligned}$$

4. Aufgabe 10 Punkte

Die Kugelkoordinatentransformation ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}. \qquad (1\,Punkt)$$

In Kugelkoordinaten folgt:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 3x^2z + y^2z + 3y^2z - z^3 + 4z^3 - y^2z = 3z(x^2+y^2+z^2) = 3r^3\cos\theta \quad (2\,Punkte)$$

$$B = \{(r,\phi,\theta)|r \in [0,2], \phi \in [0,\frac{\pi}{2}], \theta \in [0,\frac{\pi}{2}]\}, \qquad (2\,Punkte)$$

$$dV = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi. \qquad (1\,Punkt)$$

Damit folgt nach dem Satz von Gauss:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\partial B} \vec{v}\cdot d\vec{O} &= \iiint\limits_{B} \operatorname{div}(\vec{v})dV \qquad (2\,Punkt) \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 3r^5\cos\theta\sin\theta d\phi dr d\theta \\
&= 3\cdot\frac{1}{2}\pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^2 r^5 d\phi dr \\
&= \frac{3}{2}\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\theta|_0^{\frac{1}{2}\pi}\cdot\frac{64}{6} = \frac{3}{4}\cdot\frac{64}{6}\pi = 8\pi. \qquad (2\,Punkte)
\end{aligned}$$

5. Aufgabe 5 Punkte

Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_F \vec{v}\cdot d\vec{O} &= \int_{u=0}^1\int_{v=0}^1 \det\left[\vec{v}(f(u,v)), \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right] dv\,du \\
&= \int_{u=0}^1\int_{v=0}^1 \det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2u+v & v & u \end{bmatrix} dv\,du.
\end{aligned}$$

Nach der Regel von Sarrus erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_F \vec{v}\cdot d\vec{O} &= \int_{u=0}^1\int_{v=0}^1 (0 + (2u+v) + 0 - 0 - 0 - u)\,dv\,du \\
&= \int_{u=0}^1 (uv|_{v=0}^1 + \frac{1}{2}v^2|_{v=0}^1)du = 1 \\
&= \int_{u=0}^1 (u+\frac{1}{2})\,du = 1. \qquad (5\,Punkte)
\end{aligned}$$

Verständnisteil

6. Aufgabe — 6 Punkte

(a) falsch, (b) wahr, (c) wahr, (d) falsch, (e) wahr, (f) wahr.

7. Aufgabe — 6 Punkte

Beispiellösungen:

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0\}$,

(b) $B_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \frac{1}{n}\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$,

(c) $f(x, y) = \frac{1}{2}$,

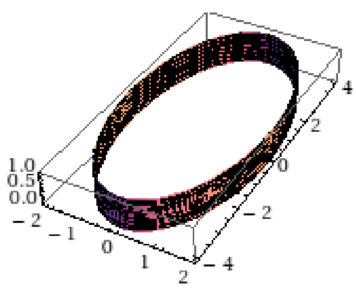
(d) $f(x, y) = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$,

(e) $f(x, y) = |x - 1|$,

(f) $\vec{v}(x, y, z) = -(yz, xz, xy)$.

8. Aufgabe — 6 Punkte

$\mathcal{F}$ ist die Mantelfläche eines Zylinders mit elliptischer Grundfläche.



Eine Parametrisierung ist gegeben durch

$$(\phi, z) \mapsto \vec{X}(r, \phi) = \begin{pmatrix} 2\cos\phi \\ 4\sin\phi \\ z \end{pmatrix}, \quad \phi \in [0, 2\pi], z \in [0, 1].$$

9. Aufgabe 6 Punkte

Der Wert des Integrals ist 0, da sich die Integrale über Nord- und Südhemisphäre kompensieren. (6 Punkte)

10. Aufgabe 6 Punkte

Es ist $\vec{g}(0,1) = (0,\ 2)^T$ (1 Punkt)

und $\vec{g}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. (2 Punkte)

Mit der Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned} h'(0,1) &= f'(\vec{g}(0,1)) \cdot \vec{g}\,'(0,1) \\ &= f'(0,2) \cdot \vec{g}\,'(0,1) \\ &= (1,4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = (13,8). \end{aligned}$$

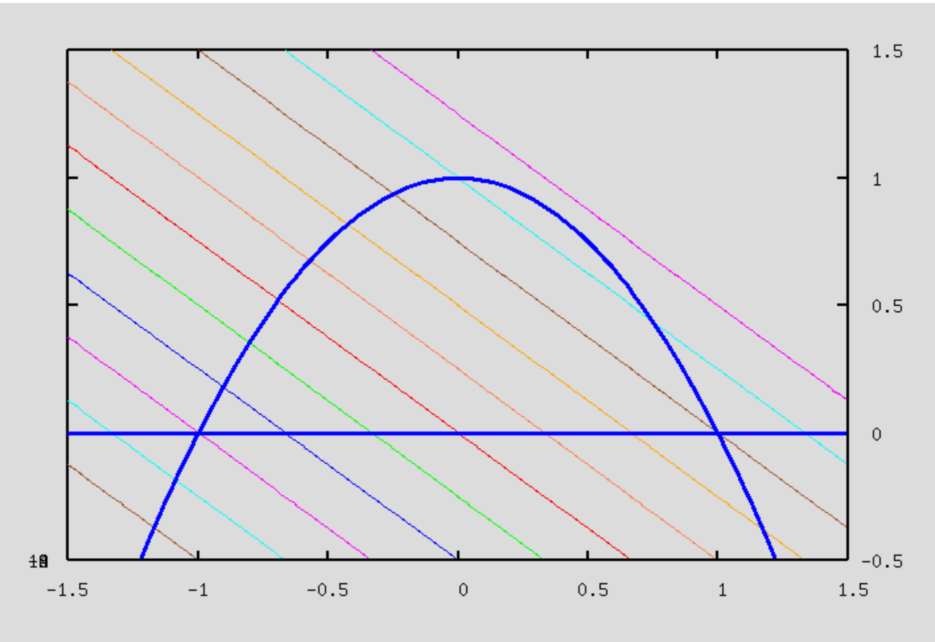
Der gesuchte Gradient ist $(13,\ 8)^T$. (3 Punkte)

11. Aufgabe 10 Punkte

(a) D ist abgeschlossen und beschränkt, daher kompakt. f ist stetig, nimmt daher Maximum und Minimum auf D an. (2 Punkte)

(b) Notwendige Bedingung für unbeschränkte Extrema ist das Verschwinden der Ableitung. Es gilt aber $f'(x,y) = (3,4) \neq 0$ für alle x, y, somit liegen keine inneren Extrema vor. (2 Punkte)

(c) Folgendes Bild zeigt die Höhenlinien der linearen Funktion f (Geraden) sowie den Bereich D. (3 Punkte)



(d) f steigt nach “rechts oben” hin an, dementsprechend liegt das globale Minimum in der “linken unteren” Ecke von D. Dies ist $p = (-1,0)^T$. Die zugehörige Höhenlinie schneidet D nur im Punkt p, der somit das einzige globale Minimum ist. (3 Punkte)