Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 11
Penn-Karras, Rohwedder, Stephan, von Renesse, Weiser 09.04.2011

April – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Beachten Sie ferner, dass nicht angemeldete Klausuren ebenfalls nicht gewertet werden.

Die Klausur besteht aus zwei Teilen, einem Rechen- und einem Verständnisteil. Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

6	7	8	9	10	11	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe — 9 Punkte

Berechnen Sie das Integral $\iiint_B f(x,y,z)dxdydz$ von $f(x,y,z) = z^4$ und

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

unter Verwendung von Kugelkoordinaten.

2. Aufgabe — 9 Punkte

(a) Bestimmen Sie im Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ den Gradienten und die Hessematrix der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = 2xy + 5(x^2 + y^2) + 8(y - x) + 6.$$

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima von f.

(c) Bestimmen Sie die zu f gehörige Taylorformel zweiten Grades um den Entwicklungspunkt $(0,0)$.

3. Aufgabe — 9 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ e^{z^2} \\ e^{y^2} \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie das Vektorfeld $\vec{w}(\vec{x}) = \mathrm{rot}_{\vec{x}}\, \vec{v}$.

b) Es sei S die obere Halbsphäre $S = \{(x,y,z) \,\big|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$.

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes $\iint\limits_S \vec{w} \cdot d\vec{O}$.

4. Aufgabe — 6 Punkte

Berechnen Sie das Integral $\iint_F 6ydxdy$ über das Dreieck F mit den Ecken $(0,0)$, $(2,2)$ und $(2,4)$.

5. Aufgabe — 7 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f(x,y,z) = \sqrt{1 + (x+y)^2 - 2z}$ und die Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$ mit der Parametrisierung

$$\vec{x}(u,v) = (u, v, uv)^T, \quad u, v \in [0,1].$$

a) Zeigen, Sie dass das skalare Oberfächenelement durch $dO = \sqrt{1 + u^2 + v^2}\, dudv$ gegeben ist.

b) Berechnen Sie das skalare Oberflächenintegral

$$\iint_F f(x,y,z)\, dO.$$

Verständnisteil

6. Aufgabe

8 Punkte

Durch die Parametrisierung $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \ln t \end{pmatrix}$, $t \in [1, e]$ ist eine Kurve in der x-z-Ebene des $\mathbb{R}^3$ gegeben. Geben Sie eine Parametrisierung der Fläche an, die durch Rotation dieser Kurve um die z-Achse entsteht. Skizzieren Sie die Fläche.

7. Aufgabe

9 Punkte

Es sei $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 16, |z| \leq 2\}.$$

Skizzieren Sie Z und bestimmen Sie den Wert des Flussintegrals $\iint_{\partial Z} \vec{v} \cdot d\vec{O}$.

8. Aufgabe

6 Punkte

Begründen Sie, warum die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^4 + y^2} & \text{für } x, y \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } x, y = (0,0) \end{cases}$$

in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ stetig ist.

9. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben sei eine Abbildung $\vec{f} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{f}'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{5}{1+x^2} & 0 \\ 2x & -4 \end{pmatrix}$$

und die Abbildung $\vec{g} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{g}(x, y) = (2y + \sin x, e^x)^T$ Ermitteln Sie unter der Verwendung der Kettenregel die Ableitung der Abbildung $\vec{h} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{h} = \vec{f} \circ \vec{g}$ an der Stelle $(0, 1)$.

10. Aufgabe

5 Punkte

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Notieren Sie Ihre Lösungen **ohne** Begründung auf einem separaten Blatt. Für eine richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für eine falsche verlieren Sie einen Punkt. Nicht beantwortete Fragen werden auch nicht gewertet. Die minimale Punktzahl dieser Aufgabe beträgt 0.

(a) Die Menge $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist offen und beschränkt.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = e^x \sin y$, nimmt ein globales Minimum an.

(c) Jedes stetig partiell differenzierbare wirbelfreie Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ besitzt ein Potential.

(d) Die Folge $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert durch $\vec{x}_k := (\frac{\sin(k\pi)}{k}, \frac{1}{k}, \arctan k)$ ist konvergent.

(e) Das Kurvenintegral des Vektorfelds $\vec{v}(\vec{x}) = (x, 0, 0)^T$ entlang der Kurve $\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T$, hat den Wert 0.

11. Aufgabe

5 Punkte

Geben Sie jeweils ein Beispiel *ohne Begründung* an:

1. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die in $(0, 0, 0)$ eine positive Determinante der Hessematrix, aber kein Maximum aufweist.
2. Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die weder offen noch abgeschlossen ist.
3. Eine Funktion mit Ableitung $(2, y, -z^2)$.
4. Ein nicht-konstantes Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dessen Flussintegral über den Rand der Einheitskugel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 0 ergibt.
5. Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die in allen Punkten der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ nicht differenzierbar ist.