Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 11

Penn-Karras, Rohwedder, Stephan, von Renesse, Weiser 09.04.2011

April – Klausur
Analysis II für Ingenieure
Musterlösung

<u>Rechenteil</u>

1. Aufgabe (9 Punkte)

In Kugelkoordinaten ist $f(x, y.z) = r^4 \cos^4\theta$ (2 Punkte), das Volumenelement ist $r^2 \sin(\theta) dr\, d\phi\, d\theta$ (1 Punkt), somit

$$\iint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^6 \cos^4\theta \sin\theta dr d\theta d\phi \qquad \text{(1 Punkt f. korr. Grenzen)}$$

$$= 2\pi \frac{-\cos^5\theta}{5}\Big|_0^{\pi} \frac{1}{7} = \frac{4\pi}{35}. \qquad (\tfrac{1}{7}\text{:1 Punkt, } 2\pi\text{:1 Punkt})$$

(Integral über $\theta = \frac{2}{5}$: 2 Punkte), Rest 1 Punkt

2. Aufgabe (9 Punkte)

(a) Es ist

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 10x - 8 + 2y \\ 10y + 8 + 2x \end{pmatrix}, \quad \text{(2 Punkte)} \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}. \quad \text{(1 Punkt)}$$

(b) <u>Kritische Punkte:</u> $\operatorname{grad} f(x,y) = 0 \Rightarrow y = -1, x = 1.$ (2 Punkte)

<u>Hinreichende Bedingung:</u> Es ist $H_f(x,y) > 0$, da

- $\det H_f(1,-1) = 96 > 0$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = 10 > 0$, oder da
- die Eigenwerte der Hessematrix beide positiv sind ($\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 8$)

also hat f in $(x,y) = (1,-1)$ ein lokales Minimum. (2 Punkte)

(c) Aus (a) ergibt sich $\operatorname{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \end{pmatrix}$, (1 Punkt)

also ist

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + \operatorname{grad} f(0,0)^T \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} + (x-0, y-0) H_f \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} \\ &= 6 + (-8,8)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x,y)\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \\ &= 6 + 8(y-x) + 2xy + 5(x2 + y2). \end{aligned}$$

(1 Punkt)

3. Aufgabe 9 Punkte

a) $\vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ e^{z^2} \\ e^{y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ye^{y^2} - 2ze^{z^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 Punkte (1 Punkt, falls Def. rot $\vec{v}$ korrekt))

b) Die Randkurve γ von S ist der Einheitskreis in der x-y-Ebene mit der Parametrisierung $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$. (2 Punkte)

Man erhält

$$\begin{aligned} \iint\limits_S \vec{w} \cdot d\vec{O} &= \iint\limits_S \text{rot}\vec{v} \cdot d\vec{O} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{ds} \quad (2 Punkte) \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ e^0 \\ e^{\sin^2 t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \quad (2\ Punkte) \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin t \cos t + \cos t \, dt = -\frac{1}{2}\sin^2(t) + \sin t\Big|_0^{2\pi} = 0. \quad (1\ Punkt) \end{aligned}$$

4. Aufgabe 6 Punkte

Es gilt $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 2, x \le y \le 2x\}$. (3 Punkte)
Es folgt:

$$\begin{aligned} \iint_F 6y dx dy &= \int_0^2 \int_x^{2x} 6y dy dx && \text{(1 Punkt f. richtige Reihenfolge)} \\ &= \int_0^2 \left[3y^2\right]_{y=x}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^2 9x^2 dx = 3\left[x^3\right]_0^2 = 24 && \text{(je 1 Punkt f. korrektes Integrieren)} \end{aligned}$$

5. Aufgabe 7 Punkte

a)

$$\begin{aligned} dO &= \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right\| du\, dv && \text{(1 Punkt)} \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix} \right\| du\, dv && \text{(1 Punkt)} \\ &= \left\| \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix} \right\| du\, dv && \text{(1 Punkt)} \\ &= \sqrt{1 + u^2 + v^2}\, du dv && \text{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
\int_F f(x,y,z)\,dO &= \int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{1} f(\vec{x}(u,v))\sqrt{1+u^2+v^2}\,dv\,du \\
&= \int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{1} \sqrt{1+(u+v)^2-2uv}\sqrt{1+u^2+v^2}\,dv\,du \\
&= \int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{1} (1+u^2+v^2)\,dv\,du \\
&= 1+1/3+1/3 = 5/3.
\end{aligned}
$$

korrekte Grenzen, $\vec{x}$ in f einsetzen und mit dO multiplizieren: 2 Punkte; Integrieren: 1 Punkt.

Verständnisteil

6. Aufgabe

8 Punkte

Eine Parametrisierung ist z.B. $\vec{x}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ \ln t \end{pmatrix}$ (3 Punkte) mit $t \in [1, e]$ (1 Punkt), $\varphi \in [0, 2\pi]$. (1 Punkt)

Skizze: 3 Punkte

7. Aufgabe

9 Punkte

Gemäß Satz von Gauss $\iint_{\partial Z} \vec{v} \cdot d\vec{O} = \iiint_Z \operatorname{div} \vec{v}(x) dx$ (2 Punkte), wobei hier $\operatorname{div} \vec{v}(x) = 1$ (2 Punkte) und Z der Zylinder parallel zur z-Achse mit Radius 4 und Länge 4 ist, d.h. Volumen $\pi \cdot 16 \cdot 4 = 64\pi$. Folglich

$$\iint_{\partial Z} \vec{v} \cdot d\vec{O} = 64\pi. \qquad (3\ Punkte)$$

Skizze: 2 Punkte.

8. Aufgabe

6 Punkte

In $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ ist f stetig als Hintereinanderausführung stetiger Funktionen. (2 Punkte)

In $(x, y) = (0, 0)$ gilt für jede Folge $(x_n, y_n) \to (0, 0)$, dass

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |f(x_n, y_n)| &\le \lim_{n\to\infty} (x_n^2 + y_n^2) \underbrace{\left|\sin\left(\frac{1}{x_n^4 + y_n^2}\right)\right|}_{\le 1} \\ &\le \lim_{n\to\infty} (x_n^2 + y_n^2) = 0 = f(0, 0). \end{aligned}$$

f ist also auch in $(0, 0)$ und daher auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.

9. Aufgabe

7 Punkte

Es gilt

$$\vec{g}'(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x & 2 \\ e^x & 0 \end{pmatrix} \text{ (2 Punkte) also } \vec{g}'(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (1 Punkt)}$$

und

$$\begin{aligned} \vec{f}'(\vec{g}(0, 1)) &= \vec{f}'(2, 1) && \text{(1 Punkt)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} && \text{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

Daraus folgt nach der Kettenregel:

$$\vec{h}'(0,1) = \vec{f}'(\vec{g}(0,1)) \cdot \vec{g}'(0,1)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 Punkte)}$$

10. Aufgabe — 5 Punkte

(a) falsch, (b) falsch, (c) wahr, (d) wahr, (e) wahr.

11. Aufgabe — 5 Punkte

Beispiellösungen:

1. $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y >= 0\}$
3. $f(x,y,z) = 2x + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}z^3$
4. $v(x,y,z) = (y,0,0)$
5. $f(x,y) = |x-y|$