Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 2011
Bärwolff, Neitzel, Penn-Karras 20.07.2011

Juli – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

10 Punkte

a) Der Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ im 1. Quadranten sei begrenzt durch die Kurven

$$y = x^2, \quad y = 2 - x^2, x = 0.$$

Skizzieren Sie B und berechnen Sie $\iint\limits_B xydxdy$.

b) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ xz \end{pmatrix}$$

durch die Fläche F, die durch

$$\vec{x}(u,\varphi) = \begin{pmatrix} u\cos\varphi \\ u\sin\varphi \\ u^3 \end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le u \le 1$$

parametrisiert ist.

2. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - y\cos z \\ z - x\cos z \\ y + xy\sin z \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie alle Potentiale von $\vec{v}$.

b) Bestimmen Sie $grad\, div\, \vec{v}$ und $rot\, rot\, \vec{v}$.

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 e^{-(x^2+y^2)}$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f und entscheiden Sie, wo lokale Maxima und lokale Minima vorliegen. Begründen Sie, dass das globale Minimum in unendlich vielen Punkten angenommen wird.

Verständnisteil

4. Aufgabe 12 Punkte

a) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + y^2$. Weisen Sie nach, dass die Tangentialebene an die durch $z = f(x,y)$ definierte Fläche im Punkt $(1,1,\frac{5}{4})$ parallel zur Ebene $z = x + 2y$ ist.

b) Stellen Sie den Körper

$$K = \left\{(x,y,z) \,|\, 0 \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right\}$$

in Zylinderkoordinaten dar und bestimmen Sie das Integral $\iiint\limits_K z dx dy dz$.

c) Begründen Sie, dass die Abbildung

$$\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ y^2 \sin x \\ y \end{pmatrix}$$

differenzierbar ist und geben Sie die Funktionalmatrix an.

5. Aufgabe 10 Punkte

a) Geben Sie (ohne Begründung) Teilmengen $A, B, C \subset \mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften an

i) A ist beschränkt, aber nicht abgeschlossen

ii) B ist abgeschlossen, aber nicht kompakt

iii) C ist offen, aber nicht konvex.

b) Untersuchen Sie die Folgen

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} (-1)^k \\ \arctan(k) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k}\cos(k\pi) \\ 1 + \frac{1}{k} \end{pmatrix}$$

auf Konvergenz und geben Sie ggf. den Grenzwert an.

c) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei in $(0,0)$ nicht stetig. Geben Sie (ohne Begründung) für jede der folgenden Aussagen an, ob diese aus den Voraussetzungen gefolgert werden kann oder nicht.

i) f ist an der Stelle $(0,0)$ nicht partiell nach x differenzierbar

ii) $\lim\limits_{k\to\infty} f(\frac{1}{k},0) \neq f(0,0)$

iii) f nimmt an der Stelle $(0,0)$ kein Extremum an

iv) f ist an der Stelle $(0,0)$ nicht differenzierbar

6. Aufgabe 8 Punkte

Gegeben seien das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix}$$

sowie der Quader $Q = \left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -1 \le x \le 1, \quad -1 \le y \le 1, \quad -1 \le z \le 1\right\}$ mit Rand ∂Q, dessen Normalen nach außen gerichtet sind.

Bestimmen Sie das Flussintegral $\iint\limits_{\partial Q} \vec{v} \cdot d\vec{O}$.