Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Bärwolff, Neitzel, Penn-Karras, Stephan

SS 11
09.04.2011

**Juli – Klausur**
**Analysis II für Ingenieure**
**Musterlösung**

## Rechenteil

### 1. Aufgabe

10 Punkte

a) Der Schnittpunkt im 1. Quadranten der beiden Kurven $y = x^2$ und $y = 2 - x^2$ ist $(1, 1)$. Somit gilt:

$$\iint\limits_B xy dx dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{2-x^2} xy dy dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x((2-x^2)^2 - x^4)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x(4 + x^4 - 4x^2 - x^4)dx$$
$$= 2\int_0^1 (x - x^3)dx$$
$$= 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}.$$

(Skizze 2 Punkte; Rechnung 3 Punkte)

b)

$$\iint_F \vec{v} \cdot d\vec{O} = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{v}(\vec{x}(u,\varphi)) \cdot (\vec{x}_u \times \vec{x}_\varphi)\, d\varphi du$$
$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} u\sin\varphi \\ -u\cos\varphi \\ u^4\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 3u^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u\sin\varphi \\ u\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right) d\varphi du$$
$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} u\sin\varphi \\ -u\cos\varphi \\ u^4\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3u^3\cos\varphi \\ -3u^3\sin\varphi \\ u \end{pmatrix} d\varphi du$$
$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^5 \cos\varphi\, d\varphi du$$
$$= \frac{1}{6}.$$

(5 Punkte)

## 2. Aufgabe

10 Punkte

a) $\Phi(x,y,z) = -x^2 + xy\cos z - yz + c.$ (4P.)

b) $$grad\, div\, \vec{v}(x,y,z) = grad(2 + xy\cos z) = \begin{pmatrix} y\cos z \\ x\cos z \\ -xy\sin z \end{pmatrix}.$$

$\vec{v}$ besitzt ein Potential. Also ist $rot\ \vec{v} = \vec{0}$ uns somit $rot\, rot\, \vec{v} = \vec{0}$. (6P.)

## 3. Aufgabe

10 Punkte

Da $f(x,y) \geq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $= 0$ genau dann, wenn $x = 0$, wird das globale Minimum in unendlich vielen Punkten angenommen.

Kritische Punkte:

$$\begin{aligned} & grad\ f = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 2e^{-(x^2+y^2)}(x - x^3) \\ -2x^2ye^{-(x^2+y^2)} \end{pmatrix} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & x = 0 \text{ oder } (x,y) = (1,0) \text{ oder } (x,y) = (-1,0). \end{aligned}$$

Den Fall $x = 0$ haben wir bereits behandelt.

$$Hess_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} -4xe^{-(x^2+y^2)}(x - x^3) + 2e^{-(x^2+y^2)}(1 - 3x^2) & -4ye^{-(x^2+y^2)}(x - x^3) \\ -4ye^{-(x^2+y^2)}(x - x^3) & -2x^2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2y^2e^{-(x^2+y^2)} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$Hess_{(1,0)}f = \begin{pmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix} = Hess_{(-1,0)}f$$

Die Determinante ist $> 0$; der erste Eintrag ist negativ. Also ist die Hessematrix an den beiden Stellen negativ definit. Also liegt an beiden Stellen ein lokales Maximum vor.

## Verständnisteil

### 4. Aufgabe 12 Punkte

a) Die Tangentialebene von $f$ im Punkt $(1, 1, \frac{5}{4})$ ist parallel zur Ebene $z = x+2y =: g(x, y)$, wenn die Gradienten von $f$ und $g$ an der Stelle $(1, 1)$ gleich sind. Dies ist aber der Fall, da $grad_{(1,1)}g = (1, 2)^T$ und $grad_{(x,y)}f = (x^3, 2y)^T$, also $grad_{(1,1)}f = (1, 2)^T$.

b)

$$K = \left\{(\rho, \phi, z) \in [0, \infty[\times[0, 2\pi] \times \mathbb{R}, \,|\, 0 \leq z \leq \sqrt{4-\rho^2}\right\}$$

$$\begin{aligned}\iiint\limits_K z dxdydz &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} z\rho \, dzd\phi d\rho \\ &= \pi \int_0^2 \rho(4-\rho^2) \, d\rho \\ &= \pi \int_0^2 (4\rho - \rho^3) \, d\rho \\ &= \pi(2 \cdot (4-0) - \frac{1}{4}(16-0)) = 4\pi.\end{aligned}$$

c) Alle partiellen Ableitungen existieren und sind stetig. Nach Satz 38 des Skriptes ist $\vec{f}$ demnach differenzierbar.

$$\vec{f}'(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ y^2 \cos x & 2y \sin x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Punkteverteilung: je 4 Punkte.

### 5. Aufgabe 10 Punkte

a) i) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ (1P)

ii) $B := \mathbb{R}^2$ (1P)

iii) $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x-4)^2 + y^2 < 1\}$ (1P)

b) $\vec{x}_k$ ist divergent, da die Komponentenfolge $\left((-1)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ divergiert.
$\vec{y}_k$ ist konvergent mit Grenzwert $(0, 1)$. (3P)

c) i) nein, kann nicht (1P)

ii) nein, kann nicht (1P)

iii) nein, kann nicht (1P)

iv) ja, kann (1P)

**6. Aufgabe** 8 Punkte

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{\partial Q} \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \iiint\limits_{Q} \operatorname{div} \vec{v} \, dV \\
&= 6 \iiint\limits_{Q} 1 \, dV \\
&= 6 \cdot 2^3 = 48.
\end{aligned}
$$