Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Bärwolff, Neitzel, Penn-Karras

SS 2011
14.10.2011

Oktober – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei $f(x,y) = x\ln(xy)$.

a) Bestimmen und skizzieren Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ von f.

b) Geben Sie den Gradienten von f, die Hessematrix von f, und Δf an.

c) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $(1,1)$ in Richtung $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^T$.

d) Bestimmen Sie mit Hilfe des Taylorpolynoms 2. Grades von f im Entwicklungspunkt $(1,1)$ näherungsweise $f(\frac{9}{10}, \frac{11}{10})$.

2. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Kurve

$$\vec{c}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{c}(t) = \begin{pmatrix} t\sin t \\ t\cos t \\ t \end{pmatrix},$$

das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z^2 \end{pmatrix},$$

und die Funktion

$$u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad u(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2+2}.$$

a) Weisen Sie nach, dass das skalare Streckenelement ds gegeben ist durch

$$ds = \sqrt{t^2+2}dt$$

und berechnene Sie

$$\int_{\vec{c}} u\, ds.$$

b) Berechnen Sie $\int_{\vec{c}} \vec{v} \cdot \vec{ds}$.

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = e^{x+y}$$

mit Definitionsbereich

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \le 2\}.$$

Untersuchen Sie f im Inneren von D auf lokale Extrema und auf ganz D auf globale Extrema.

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

Der Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ sei beschrieben durch $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \quad x \geq 0\}$.

a) Skizzieren Sie B.

b) Beschreiben Sie B in Polarkoordinaten.

c) Berechnen Sie das Integral

$$\iint_B \frac{x}{x^2 + y^2} dxdy.$$

5. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Einheitskugel $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, eine Parametrisierung der Sphäre $S = \partial E$ mit nach außen gerichteten Normalen, sowie das Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\vec{w}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorpotential von $\vec{v}$ ist, wobei

$$\vec{w}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{pmatrix}.$$

b) Begründen oder widerlegen Sie:

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{O} = 0.$$

c) Besitzt $\vec{v}$ ein Potential?

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Geben Sie (ohne Begründung) Teilmengen $A, B, C, D \subset \mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften an

i) A enthält keine Randpunkte.

ii) B besteht nur aus Randpunkten.

iii) C ist weder offen noch abgeschlossen

b) Untersuchen Sie die Folgen $(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\vec{b}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\vec{a}_n := \left(\frac{1}{n^2} \arctan(n), \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right), \quad \vec{b}_n := \left(\frac{\ln(n)}{n}, \cos(n\pi)\right)$$

auf Konvergenz. Begründen Sie Ihre Aussagen.

c) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei in (x_0, y_0) partiell differenzierbar aber nicht total differenzierbar. Geben Sie (ohne Begründung) für jede der folgenden Aussagen an, ob diese aus den Voraussetzungen gefolgert werden kann oder nicht.

i) f ist an der Stelle (x_0, y_0) nicht stetig.

ii) Nicht alle partiellen Ableitungen von f sind an der Stelle (x_0, y_0) stetig.

iii) f ist an der Stelle (x_0, y_0) in Richtung $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$ differenzierbar.