Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 11
Bärwolff, Neitzel, Penn-Karras, Stephan 14.10.2011

Oktober – Klausur
Analysis II für Ingenieure
Musterlösung

<u>Rechenteil</u>

1. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben sei $f(x,y) = x\ln(xy)$.

a) $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy > 0\}$.
Skizze: D besteht also aus I. und III. Quadraten ohne Achsen.

b)
$$\text{grad} f = \begin{pmatrix} \ln(xy)+1 \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix}, \quad \text{Hess} f = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \end{pmatrix}, \quad \Delta f = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}.$$

c) $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

d)
$$\begin{aligned} T(x,y) &= f(1,1) + \text{grad}_{(1,1)} f \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1, y-1)\text{Hess}_{(1,1)} f \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \\ &= x + y - 2 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + (x-1)(y-1) \\ \Rightarrow & f(\frac{9}{10}, \frac{11}{10}) \approx \frac{-1}{100}. \end{aligned}$$

2. Aufgabe 10 Punkte

a)
$$\begin{aligned} ds = |\dot{\vec{c}}(t)|dt &= \left| \begin{pmatrix} \sin t + t\cos t \\ \cos t - t\sin t \\ 1 \end{pmatrix} \right| dt \\ &= \sqrt{\sin^2 t + t^2\cos^2 + 2t\sin t\cos t + \cos^2 + t^2\sin^2 - 2t\sin t\cos t + 1} = \sqrt{t^2+2}dt. \end{aligned}$$
$$\int_{\vec{c}} u\,ds = \int_0^1 u(\vec{c}(t))|\dot{\vec{c}}(t)|dt = \int_0^1 t(t^2+2)dt = \int_0^1 (t^3+2t)dt = \frac{5}{4}$$

b)

$$\int_{\vec{c}} \vec{v} \cdot \vec{ds} = \int_0^1 \vec{v}(\vec{c}(t)) \cdot \dot{\vec{c}}(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin t + t \cos t \\ \cos t - t \sin t \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 (t + t^2) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

3. Aufgabe

10 Punkte

Notwendiges Kriterium für lokale Extremstellen:

$$\begin{aligned} &\mathrm{grad} f = \vec{0} \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} e^{x+y} \\ e^{x+y} \end{pmatrix} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Da die e-Funktion immer positiv ist, ist das Kriterium nicht erfüllbar, d.h. es gibt keine lokalen Extrema.

Zur Berechnung der globalen Extrema, die sich nun nur noch auf dem Rand befinden können, benutzen wir den Lagrange-Ansatz

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}\, f &= \lambda\, \mathrm{grad}\, g \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

mit $g(x, y) = (x-1)^2 + y^2 - 2$. Obiges System ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} e^{x+y} - 2\lambda(x-1) &= 0 \\ e^{x+y} - 2\lambda y &= 0 \\ (x-1)^2 + y^2 &= 2. \end{aligned}$$

Subtraktion der 2. Gleichung von der 1. Gleichung liefert $\lambda(y - x + 1) = 0$. Im Fall $\lambda = 0$ gibt es aber keine Lösung. Also untersuchen wir den Fall $y = x - 1$. Eingesetzt in die 3. Gleichung erhalten wir $x = 0$ oder $x = 2$. Wir erhalten somit als Kandidaten für globale Extrema $(0, -1)$ und $(2, 1)$. Wegen $\frac{1}{e} = f(0, -1) < f(2, 1) = e^3$ liegt an der Stelle $(0, -1)$ das globale Minimum und an der Stelle $(2, 1)$ das globale Maximum von f.

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Skizze (fehlt): B ist ein Halbkreisring im I. und IV. Quadranten mit Innenradius 2, Außenradius 3 und Ursprung als Mittelpunkt.

b) In Polarkoordinaten ist B beschrieben durch die Menge der Punkte (ρ, ϕ) mit $2 \leq \rho \leq 3$ und $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$.

c) Nach dem Transformationssatz gilt:

$$\begin{aligned}\iint\limits_B \frac{x}{x^2+y^2} dxdy &= \int_2^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho\cos\phi}{\rho^2} \rho\, d\phi d\rho \\ &= \int_2^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\, d\phi d\rho \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\, d\phi \\ &= 2\end{aligned}$$

5. Aufgabe

10 Punkte

a) Es gilt

$$\operatorname{rot}\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial \vec{w}}{\partial y} \\ \frac{\partial \vec{w}}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -z \\ -x \end{pmatrix} = \vec{v}.$$

b) Nach Satz von Gauss gilt:

$$\iint\limits_S \vec{v}\cdot d\vec{O} = \iiint_E \operatorname{div}\vec{v}\, dxdydz = \iiint_E 0\, dxdydz = 0.$$

c) Nein, denn $\vec{v}$ ist nicht wirbelfrei.

6. Aufgabe

10 Punkte

a) i) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 < 1\}$.
   ii) $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 = 1\}$.
   iii) $C := [0,1[\times[0,1[$.

b) Die Folge $(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert $(0,0)$, da die erste Kompoentenfolge Produkt einer Nullfolge und einer beschränkten Folge ist und die zweite Komponentenfolge eine geometrische Folge der Form $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|x| < 1$ ist.
Die Folge $\left(\vec{b}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, da die zweite Teilfolge ischen -1 und 1 alterniert.

c) i) nein, ii) ja, iii) nein