Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 11/12

Böse, Penn-Karras, Schneider 22.02.2012

Februar – Klausur
Analysis II für Ingenieure
Musterlösung

Rechenteil

1. Aufgabe 9 Punkte

Sei $M := \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$, $S := \partial M$ sowie

$$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x,y,z) \mapsto (z^2x, y, \frac{1}{2}xyz^2).$$

Berechnen Sie das Flussintegral $\int\int_S \vec{v} \cdot d\vec{O}$ mit Hilfe des Satzes von Gauß! Es ist

$$\mathrm{div}\vec{v} = z^2 + 1 + xyz.$$

Weiter lässt sich M in Kugelkoordinaten beschreiben durch

$$\vec{u}: [0,1] \times [0,2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Es ist

$$\mathrm{div}\vec{v}(\vec{u}(r,\varphi,\vartheta)) = r^2\cos^2\vartheta + 1 + r^3\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\vartheta\cos\vartheta.$$

Dann ist mit

$$|\det \vec{u}\,'(r,\varphi,\vartheta)| = r^2\sin\vartheta$$

$$\begin{aligned}
\int\int_S \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \int\int\int_M \mathrm{div}\vec{v}\, dxdydz \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{div}\vec{v}(\vec{u}(r,\varphi,\vartheta)) r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\cos^2\vartheta\sin\vartheta + r^2\sin\vartheta + r^5\cos\varphi\sin\varphi\sin^3\vartheta\cos\vartheta d\vartheta d\varphi dr.
\end{aligned}$$

Es ist

$$\int_0^{2\pi} r^5\cos\varphi\sin\varphi\sin^3\vartheta\cos\vartheta d\varphi = \frac{1}{2}r^5\sin^2\varphi\sin^3\vartheta\cos\vartheta\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

also

$$\begin{aligned}
\int\int_S \vec{v}\cdot d\vec{O} &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\cos^2\vartheta\sin\vartheta + r^2\sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr\\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi} -\frac{1}{3}r^4\cos^3\vartheta - r^2\cos\vartheta\Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} d\varphi dr\\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{1}{3}r^4 + r^2 d\varphi dr\\
&= 2\pi\int_0^1 \frac{1}{3}r^4 + r^2 dr\\
&= 2\pi(\frac{1}{15}r^5 + \frac{1}{3}r^3)\Big|_0^1\\
&= 2\pi(\frac{1}{15} + \frac{1}{3})\\
&= \frac{4\pi}{5}.
\end{aligned}$$

2. Aufgabe 12 Punkte

Geben Sie alle lokalen Extremalstellen von f an und untersuchen Sie diese auf die Art (lokales Minimum/Maximum)! Hierbei ist $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad (x,y,z)\mapsto xy^2+x^2-2xy-3x+4+z^2$. Es ist

$$f'(x,y,z) = (y^2+2x-2y-3, 2xy-2x, 2z) = (y^2+2x-2y-3, 2x(y-1), 2z).$$

In jeder kritischen Stelle muss also $z=0$ gelten.
Weiter muss $x=0$ oder $y=1$ gelten.
Ist $x=0$, so muss $0=y^2-2y-3$ sein, also $y=3$ oder $y=-1$.
Ist $y=1$, so muss gelten: $0=2x-4$, also $x=2$.
Es gibt also die kritischen Punkte

$$(2,1,0),\qquad (0,3,0),\qquad (0,-1,0).$$

Die zweiten partiellen Ableitungen berechnen sich zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2x\\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= 2\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= 2y-2\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} &= 0\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} &= 0.
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Hessematrizen

$$A := f''(2,1,0) = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad B := f''(0,3,0) = \begin{pmatrix}2&4&0\\4&0&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

$$C := f''(0,-1,0) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A hat offensichtlich nur strikt positive Eigenwerte, d.h. in $(2,1,0)$ liegt ein lokales Minimum vor. B und C haben jeweils die Determinante -32, d.h. mindestens ein Eigenwert ist negativ. Desweiteren ist aber ein Eigenwert 2, und damit positiv. Also sind B und C indefinit, es liegt also in $(0,3,0)$ und in $(0,-1,0)$ kein lokales Extremum vor.

3. Aufgabe

9 Punkte

Berechnen Sie ein Potential von $\vec{v}$ sowie das Wegintegral $\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{ds}$, wobei

$$\vec{\gamma} : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{3 + \frac{5t}{\pi}} \\ \sin(2t) \\ \pi \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad \vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4(x^3+x) \\ \frac{zy}{y^2+1} \\ \frac{1}{2}\ln(y^2+1) - 2\cos z \sin z \end{pmatrix}.$$

Ist $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein Potential von $\vec{v}$, so muss gelten:

$$\text{(i)}\ \frac{\partial u}{\partial x} = -4(x^3+x), \quad \text{(ii)}\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{zy}{y^2+1}, \quad \text{(iii)}\ \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{2}\ln(y^2+1) + 2\cos z \sin z.$$

Aus (i) folgt

$$u(x,y,z) = -x^4 - 2x^2 + g(y,z),$$

daraus wiederum folgt mit (iii)

$$\frac{\partial g}{\partial z}(y,z) = -\frac{1}{2}\ln(y^2+1) + 2\cos z \sin z,$$

also

$$g(y,z) = -\frac{z}{2}\ln(y^2+1) + \sin^2 z + h(y),$$

insgesamt

$$u(x,y,z) = -x^4 - 2x^2 - \frac{z}{2}\ln(y^2+1) + \sin^2 z + h(y).$$

Hiermit und mit (ii) folgt

$$-\frac{zy}{y^2+1} + h'(y) = -\frac{zy}{y^2+1},$$

und damit kann $h = 0$ gewählt werden.
Ein Potential u von $\vec{v}$ ist also

$$u(x,y,z) = -x^4 - 2x^2 - \frac{z}{2}\ln(y^2+1) + \sin^2 z.$$

Weiter ist

$$\vec{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma}(\pi) = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$u(\vec{\gamma}(0)) = -(\sqrt{3})^4 - 2(\sqrt{3})^2 - \frac{0}{2}\ln(0^2+1) + \sin^2 0 = -15,$$
$$u(\vec{\gamma}(\pi)) = -(\sqrt{8})^4 - 2(\sqrt{8})^2 - \frac{\pi}{2}\ln(0^2+1) + \sin^2 \pi = -80.$$

Es ergibt sich

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{ds} = u(\vec{\gamma}(0)) - u(\vec{\gamma}(\pi)) = -15 + 80 = 65.$$

Verständnisteil

4. Aufgabe

9 Punkte

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} ye^x & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}.$$

Untersuchen Sie f auf partielle Differenzierbarkeit. Geben Sie die partiellen Ableitungen dort an, wo diese existieren. Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. für korrekte Einteilung in Fälle
Ist $x \leq 0$, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Ist $x < 0$, so ist für $h < |x|$: $f(x+h,y) = 0$, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Ist $x = 0$, so ist für $h > 0$

$$\frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \frac{ye^h - 0}{h} = \frac{y}{h}e^h.$$

Für $y \neq 0$ konvergiert dieser Ausdruck nicht für h gegen 0, d.h. f kann in $(0,y)$ für $y \neq 0$ nicht nach x differenzierbar sein.
Ist $y = 0$, d.h. $(x,y) = 0$, so ist

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0,$$

sowie

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0,$$

d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Ist $x > 0$, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^x.$$

Für $x > 0$ ist weiterhin

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x.$$

5. Aufgabe

12 Punkte

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ von $f(x,y) = (1-x^2)\ln(1-x^2)$. Ist D beschränkt? Bestimmen Sie den Rand ∂D von D. Bestimmen Sie eine stetige Funktion $g : D \cup \partial D \to \mathbb{R}$ so, dass $g(x,y) = f(x,y)$ für alle $(x,y) \in D$.

Damit $f(x,y) = (1-x^2)\ln(1-x^2)$ wohldefiniert ist, muss $1-x^2 > 0$ sein, d.h. $x \in (-1,1)$. Also ist der maximale Definitionsbereich von f die Menge $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in (-1,1)\}$. D ist unbeschränkt.
Der Rand ∂D von D ist

$$\partial D = \{(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \,| x = \pm 1\}.$$

Ist $(x,y) \in \partial D$, so ist $x^2 = 1$. Sei $((x_k,y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in D mit $\lim_{k\to\infty}(x_k,y_k) = (x,y)$. und damit

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k,y_k) = \lim_{k\to\infty} (1-x_k^2)\ln(1-x_k^2).$$

Da nach dem Satz von de L'Hopital gilt:

$$0 = \lim_{x\to 1-} -(1-x^2) = \lim_{x\to 1-} \frac{-\frac{2x}{1-x^2}}{\frac{2x}{(1-x^2)^2}} = \lim_{x\to 1-} \frac{\ln(1-x^2)}{\frac{1}{1-x^2}}$$

und

$$0 = \lim_{x\to -1+} -(1-x^2) = \lim_{x\to -1+} \frac{\ln(1-x^2)}{\frac{1}{1-x^2}},$$

ist

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k,y_k) = 0.$$

Sei also

$$g : D \cup \partial D \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \in \partial D. \end{cases}$$

Auf D ist g offensichtlich als Komposition stetiger Funktionen stetig. Ist nun $(x,y) \in \partial D$, $((x_k,y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $D \cup \partial D$ mit $\lim_{k\to\infty}(x_k,y_k) = (x,y)$, so gilt

$$\lim_{k\to\infty} g(x_k,y_k) = 0 = g(x,y),$$

da $g(x_k,y_k) = f(x_k,y_k)$ oder $g(x_k,y_k) = 0$. Damit ist g stetig.

6. Aufgabe 9 Punkte

Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ die Fläche, die von $\{(t,0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in [0,2\pi]\}$ und der Kurve

$$\vec{\gamma} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \vec{\gamma}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varphi \cos\varphi \\ \varphi \sin\varphi \end{pmatrix}$$

berandet wird. Zeichnen Sie die Kurve $\vec{\gamma}$ und berechnen Sie den Flächeninhalt von S!
Es bezeichne F den Flächeninhalt von S. Die Menge M lässt sich in Polarkoordinaten beschreiben durch

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \,|\, \varphi \in [0,2\pi], 0 \le r \le \varphi \right\}.$$

Dann ist mit der Funktionaldeterminante r der Polarkoordinatenabbildung

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\varphi} r dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{\varphi} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\varphi^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{6}\varphi^3 \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{4\pi^3}{3}. \end{aligned}$$

Skizze: