Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 11/12

Böse, Penn-Karras, Schneider 05.04.2012

April – Klausur
Analysis II für Ingenieure
Musterlösung

<u>Rechenteil</u>

1. Aufgabe 13 Punkte

Wir haben $g(x, y) := 10x^2 + 10y^2 + 12xy - 1 = 0$ als Nebenbedingung.

1. *Nichtsingularität der Nebenbedingung:* Wir setzen den Gradienten der Nebenbedingung null
$$\mathrm{grad}_{(x^\natural, y^\natural)}\, g = \vec{0} = \begin{pmatrix} 20x^\natural + 12y^\natural \\ 20y^\natural + 12x^\natural \end{pmatrix}$$
ist nur für $\begin{pmatrix} x^\natural \\ y^\natural \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ erfüllt. Es ist aber $g(x^\natural, y^\natural) = -1 \neq 0$, d.h. $(x^\natural, y^\natural)$ ist nicht zulässig.

2. *Lagrangeformalismus:* Wir setzen die Lagrangefunktion
$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$
an und setzen den Gradienten Null, um die kritischen Punkte zu finden:
$$\vec{0} = \mathrm{grad}_{(x,y,\lambda)}\, L = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda(20x + 12y) \\ \lambda(12x + 20y) \\ 10x^2 + 10y^2 + 12xy - 1 \end{pmatrix}.$$
Folgender Lösungsweg bietet sich an: Wir multiplizieren die erste Zeile mit -3, addieren erste und zweite Zeile und erhalten
$$0 = -\lambda(48x + 16y).$$
Der Fall $\lambda = 0$ ist ausgeschlossen, denn $(0, 0) \neq (1, 3)$ im Gradienten der Lagrangefunktion. Es gilt also $x = -\frac{1}{3}y$. Setzen wir dies in g ein, folgt
$$g(-\frac{1}{3}y, y) = \frac{64}{9}y^2 - 1 = 0,$$
was zu den Lösungen $(x^\sharp, y^\sharp) = (-\frac{1}{8}, \frac{3}{8})$ und $(x^\flat, y^\flat) = (\frac{1}{8}, -\frac{3}{8})$ führt.

3. *Art der Extrema:* Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 10x^2 + 10y^2 + 12xy = 1\}$ ist kompakt und nichtleer. Weil die Funktion f stetig ist nimmt sie auf der Ellipse sowohl Maximum als auch Minimum an. Da der Lagrangeformalismus greift, geschieht dies in den kritischen Punkten $x^\sharp$ und $x^\flat$.

   Offenbar ist $1 = f(x^\sharp) > f(x^\flat) = -1$, und deswegen $f(x^\sharp)$ das Maximum und $f(x^\flat)$ das Minimum von f auf der gegebenen Menge.

2. Aufgabe

10 Punkte

Wir wählen Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z)$ und erhalten die Mengenbeschreibung

$$H := \{(\rho, \phi, z) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} : z^2 + \frac{\rho^2}{1/10 + z^2} \leq 1\}.$$

Setzen wir $(x, y) = 0$, so erhalten wir die Grenzen $z \in [-1, +1]$, $\phi \in [0, 2\pi)$, und

$$\rho^2 \leq (1/10 + z^2)(1 - z^2) = 1/10 + 9/10z^2 - z^4.$$

Die Funktionaldeterminante beim Koordinatenwechsel ergibt sich zu ρ. Für das Volumen folgt:

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_V 1\mathrm{d}V \\
&= \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{(\frac{1}{10}+z^2)(1-z^2)}} \int_0^{2\pi} \rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}z \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (\frac{1}{10} + z^2)(1 - z^2)\mathrm{d}z \\
&= \pi \int_{-1}^{1} \frac{1}{10} + (1 - \frac{1}{10})z^2 - z^4 \mathrm{d}z \\
&= \pi\big(\frac{1}{10}z + \frac{3}{10}z^3 - \frac{1}{5}z^5\big)\big|_{-1}^{1} \\
&= 2\pi\big(\frac{1}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{5}\big) \\
&= \frac{2}{5}\pi
\end{aligned}$$

3. Aufgabe

7 Punkte

Die gemessenen Werte implizieren den berechneten Widerstand

$$W(R, C) = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2}} = \sqrt{144 + 25} = 13.$$

Es gilt für die Ableitung nach R die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial W}{\partial R}(R, C)\Big| &= \Big|\frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2}}}\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2C^2}}}\Big| \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial W}{\partial C}(R, C)\Big| &= \Big|\frac{1}{2\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2}}} \frac{2}{C^3}\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2}} \frac{1}{C^2}\Big|
\end{aligned}$$

kann durch

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial W}{\partial C}(R,C)\right| &\leq \left|\frac{1}{C^2}\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{(C-\delta C)^2}\right| \\
&\leq 100.
\end{aligned}$$

abgeschätzt werden.

Damit ergibt sich als Fehlerschranke

$$|W(R,C)-W(R^*,C^*)| \leq \sup\left|\frac{\partial W}{\partial R}(\tilde{R},\tilde{C})\right|\delta R + \sup\left|\frac{\partial W}{\partial C}(\tilde{R},\tilde{C})\right|\delta C \leq 2+10,$$

wobei die Suprema über $[R-\delta R, R+\delta R]\times[C-\delta C, C+\delta C]$ zu nehmen sind. Als Intervall, in dem der Widerstand sicher liegt, folgt $W^* \in [1,25]$.

Alternativ (und genauer) wird

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial W}{\partial C}(R,C)\right| &= \left|\frac{1}{2\sqrt{R^2+\frac{1}{C^2}}}\frac{2}{C^3}\right| \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{C^6R^2+C^4}}\right|
\end{aligned}$$

maximiert für $R-\delta R = 10, C-\delta C = \frac{1}{10}$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial W}{\partial C}(R,C)\right| &\leq \left|\frac{1}{(C-\delta C)^2}\frac{1}{\sqrt{(C-\delta C)^2(R-\delta R)^2+1}}\right| \\
&\leq \frac{100}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Fehlerschranke

$$|W(R,C)-W(R^*,C^*)| \leq \sup\left|\frac{\partial W}{\partial R}(\tilde{R},\tilde{C})\right|\delta R + \sup\left|\frac{\partial W}{\partial C}(\tilde{R},\tilde{C})\right|\delta C \leq 2+\frac{10}{\sqrt{2}},$$

wobei die Suprema über $[R-\delta R, R+\delta R]\times[C-\delta C, C+\delta C]$ zu nehmen sind. Als Intervall, in dem der Widerstand sicher liegt, folgt $W^* \in [11-\frac{10}{\sqrt{2}}, 15+\frac{10}{\sqrt{2}}]$.

Verständnisteil

4. Aufgabe 10 Punkte

$\mathbb{R}^3$ ist offenbar konvex, und wir brauchen nur noch rot $\vec{F}_A = 0$ zu überprüfen. Dazu berechnet man

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} &= \operatorname{rot} A\vec{x} \\
&= \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \frac{\partial}{\partial x_3}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}ax_1 + bx_2 + cx_3\\ dx_1 + ex_2 + fx_3\\ gx_1 + hx_2 + kx_3\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}h - f\\ c - g\\ d - b\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es muß also $A = A^\top$ gelten.

Man bestimmt das Potential durch sukzessive Integration. Wir integrieren die erste Zeile nach x_1, um

$$-P(\vec{x}) = \frac{a}{2}x_1^2 + bx_2x_1 + cx_3x_1 + C^1(x_2, x_3)$$

zu erhalten. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x_2}P &= bx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}C^1 \\
&= dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}C^1 \\
&= dx_1 + ex_2 + fx_3
\end{aligned}$$

aufgrund der Symmetrie. Es folgt

$$C^1(x_2, x_3) = \frac{1}{2}ex_2^2 + fx_3x_2 + C^2(x_3).$$

Letztlich ist

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x_3}P &= cx_1 + fx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}C^2 \\
&= gx_1 + hx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}C^2 \\
&= gx_1 + hx_2 + kx_3,
\end{aligned}$$

also

$$C^2 = \frac{1}{2}kx_3^2 + C^3, C^3 \in \mathbb{R}$$

Ein gesuchtes Potential P ist also die durch $-A/2$ induzierte quadratische Form,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\vec{x}^\top A\vec{x} &= -\frac{a}{2}x_1^2 - \frac{b}{2}x_2x_1 - \frac{c}{2}x_3x_1 - \frac{d}{2}x_1x_2 - \frac{e}{2}x_2^2 - \frac{f}{2}x_3x_2 - \frac{g}{2}x_1x_3 - \frac{h}{2}x_2x_3 - \frac{k}{2}x_3^2 \\
&= -\frac{a}{2}x_1^2 - dx_1x_2 - \frac{e}{2}x_2^2 - fx_3x_2 - gx_1x_3 - \frac{k}{2}x_3^2.
\end{aligned}$$

5. Aufgabe

10 Punkte

Es gilt die Volumendarstellung $\mathrm{vol}(K) = \iiint_K 1 \mathrm{d}(x,y,z)$. Wenden wir den Satz von Gauß auf die rechte Seite an, erhalten wir

$$\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{O} = \iiint_K \operatorname{div} \vec{v} \mathrm{d}(x,y,z),$$

was zu der Bedingung

$$1 = \operatorname{div} \vec{v},$$

also vermöge der partiellen Ableitungen zu

$$1 = \operatorname{div} \vec{v} = (a+c) + (c-2)xy - 2bye^{-b(x^2+y^2+z^2)}$$

führt. Koeffizientenvergleich ergibt $b = 0$, $c = 2$ und $a = -1$, und

$$(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ 1 - y^2 x \\ 2(xyz + z) \end{pmatrix}$$

ist ein erlaubtes Vektorfeld von besagter Gestalt.

6. Aufgabe

10 Punkte

1. Falsch. Betrachte eine beliebige unstetige Funktion und multipliziere diese mit der Nullfunktion, welche stetig ist. Das Ergebnis ist die Nullfunktion, also stetig.

2. Falsch. Betrachte eine Funktion, die konstant eins auf der Oberfläche des Kompaktums ist. Das skalare Oberflächenintegral über den Rand des Kompaktums ist gerade der Flächeninhalt des letzteren, also im allgemeinen von Null verschieden.

3. Wahr. Die partiellen Ableitungen sind die Richtungsableitungen in Richtung der kanonischen Einheitsvektoren und nach Voraussetzung überall stetig. Damit ist die Funktion auch überall total differenzierbar.

4. Wahr. Die Komponenten der Funktion sind per Definition die negativen partiellen Ableitungen des Potentials und nach Voraussetzung stetig. Damit ist das Potential differenzierbar und erst recht stetig.

5. Wahr. Ist die Funktion zweimal stetig differenzierbar, so kann nach dem Satz von Schwarz die Reihenfolge der Differentiationen vertauscht werden. Deswegen sind die Einträge der Hessematrix bei Vertauschung der Indizes gleich, die Matrix ist symmetrisch.