Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 2012
Mehl, Penn-Karras, Schiela 18.07.2012

Juli – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Beachten Sie ferner, dass nicht angemeldete Klausuren ebenfalls nicht gewertet werden.

Die Klausur besteht aus zwei Teilen, einem Rechen- und einem Verständnisteil. Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

10 Punkte

a) Sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y \geq 0\}$ und

$$f : B \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy^2 + x^2 + y$$

gegeben. Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f im Inneren von B. Bestimmen Sie außerdem mit der Methode von Lagrange alle kritischen Punkte auf dem Rand ∂B.

(Sie sollen **nicht** entscheiden, ob dort Extremstellen liegen.)

b) Sei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto y^3 - y + x^2 y.$$

Untersuchen Sie, ob g in den Punkten $P_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{3}}), P_2 = (1,0)$ und $P_3 = (1,1)$ lokale Extremstellen hat und falls ja, welcher Art (Max/Min).

2. Aufgabe

10 Punkte

a) Das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -e^x \cos y \\ e^x \sin y - 3y^2 + 3z^2 \\ 6yz \end{pmatrix}$$

ist ein Potentialfeld. Geben Sie ein Potential u von $\vec{v}$ an.

b) Berechnen Sie das vektorielle Kurvenintegral für das Vektorfeld $\vec{v}$ längs einer Strecke AB mit $A = (0,1,0)$, $B = (1,0,2)$.

c) Bestimmen Sie eine Funktion $h(x,y,z)$, sodass

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6xyz \\ h(x,y,z) \end{pmatrix}$$

ein Vektorpotential von $\vec{v}$ ist.

3. Aufgabe

10 Punkte

Skizzieren Sie die Fläche S, die durch $\vec{x}$ parametrisiert wird:

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ u\cos v \\ u \sin v \end{pmatrix}, \quad \text{mit } u \in [0,1] \text{ und } v \in [0, 2\pi].$$

Berechnen Sie das Flussintegral

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{O}, \quad \text{wobei } \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 + xy \\ xz \\ xy \end{pmatrix}.$$

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 y, & \text{wenn } x > 0 \\ x(y+1), & \text{wenn } x \leq 0 \end{cases}.$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f in allen Punkten, in denen sie existieren. Geben Sie die Menge aller Punkte an, in denen mindestens eine partielle Ableitung nicht existiert.

5. Aufgabe

10 Punkte

Sei

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 1, \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\},$$

$S = \partial K$ der Rand von K und

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} zx^2 + xy \\ -\frac{1}{2} y^2 \\ -z^2 x + z^4 e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{O}$ mit Hilfe des Satzes von Gauß und wenden Sie auf das entstehende Integral die Zylinderkoordinatentransformation an, um es zu lösen!

6. Aufgabe

10 Punkte

Geben Sie jeweils einen kurzen **Beweis** für die folgenden Aussagen an, oder widerlegen Sie sie durch ein **Gegenbeispiel**.

a) Ist $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0\}$, $f : M \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion, so nimmt f auf M das globale Maximum an.

b) Ist $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ und

$$\vec{\gamma} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ 0 \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix},$$

so ist $\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$.

c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Gilt $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = f(0, 0)$, so ist f in $(0, 0)$ stetig.

d) Ist $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Potentialfeld, so ist für jeden Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ mit Rand $S = \partial K$:

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{O} = 0.$$

e) Jede Teilmenge A von $\mathbb{R}^2$ ist offen oder abgeschlossen.