Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 2012

Mehl, Penn-Karras, Schiela 18.07.2012

Juli – Klausur
Analysis II für Ingenieure
Musterlösung

<u>**Rechenteil**</u>

1. Aufgabe 10 Punkte

1. Für die Untersuchung des Inneren:

$$\operatorname{grad} f = (y^2 + 2x, 2xy + 1) = (0, 0)$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $y \neq 0$ und $2x = -1/y$. Einsetzen in die erste liefert $y^3 - 1 = 0$ also $y = 1$ und dann $x = -1/2$.

Kritischer Punkt im Inneren $P_1 = (-1/2, 1)$.

Auf dem Rand haben wir

$$\begin{aligned} y^2 + 2x &= \lambda \\ 2xy + 1 &= \lambda \\ x &= -y \end{aligned}$$

Gleichsetzen der ersten beiden und Einsetzen der letzten liefert

$$y^2 - 2y + 2y^2 - 1 = 0$$

also

$$y^2 - 2/3y - 1/3 = 0.$$

und damit

$$y_{1/2} = 1/3 \pm \sqrt{1/9 + 1/3}$$

Auf dem Rand haben wir also $P_2 = (-1, 1)$ und $P_3 = (1/3, -1/3)$ als kritische Punkte.

2. Wir haben $\operatorname{grad} g = (2xy, 3y^2 - 1 + x^2)$. Es gilt $\operatorname{grad} g(0, \frac{1}{\sqrt{3}}) = (0, 0)$, $\operatorname{grad} g(1, 0) = (0, 0)$ und $\operatorname{grad} g(1, 1) \neq (0, 0)$ also liegt an P_3 kein lokales Extremum.

$$H(g) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 6y \end{pmatrix}$$

Für P_1 bekommen wir

$$\begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 6/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

also positiv definit also lokale Minimum. Für P_2 bekommen wir

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

also indefinit also kein lokales Extremum.

2. Aufgabe

10 Punkte

1. Durch Integration der ersten Koordinate erhält man
   $u(x, y, z) = e^x \cos y + h(y, z)$
   mit einer differenzierbaren Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   Die Integration der dritten Koordinate zeigt, dass
   $h(y, z) = -3yz^2 + c(y)$ ist.
   Mit der zweiten bekommt man $c(y) = y^3 + C,\ C \in \mathbb{R}$ konstant.
   Potential gegeben durch

$$u(x, y, z) = e^x \cos y - 3yz^2 + y^3 + C.$$

2. Das Vektorfeld $\vec{v}$ besitzt ein Potential u.
   Dann gilt

$$\int\limits_{AB} \vec{v} \cdot \vec{ds} = u(A) - u(B) = \cos(1) + 1 - e.$$

3. Definitionsgemäß ist es

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial(6xyz)}{\partial z} \\ \frac{\partial 0}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial(6xyz)}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial y} - 6xy \\ -\frac{\partial h}{\partial x} \\ 6yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^x \cos y \\ e^x \sin y - 3y^2 + 3z^2 \\ 6yz \end{pmatrix}.$$

   Die zweite Komponente gibt

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 3y^2 - 3z^2 - e^x \sin y \Rightarrow h(x, y, z) = 3xy^2 - 3xz^2 - e^x \sin y + f(y, z)$$

   Dann ist es von erste Komponente

$$\frac{\partial h}{\partial y} - 6xy = 6xy - e^x \cos y + \frac{\partial f}{\partial y} - 6xy = -e^x \cos y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

   Also $\vec{F}$ ist das Vektorpotential von $\vec{v}$, wo

$$h(x, y, z) = 3xy^2 - 3xz^2 - e^x \sin y + f(z)$$

   mit $f(z)$ eine beliebige Funktion.

3. Aufgabe 10 Punkte

Es ist der Teil des Kegel.

Die Parametrisierung der Wendelfläche ist in der Aufgabenstellung gegeben.

Dann gilt:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}, \quad \text{und } \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -u \sin v \\ u \cos v \end{pmatrix},$$

also

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} u \\ -u \cos v \\ -u \sin v \end{pmatrix}$$

Flussintegral:

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \vec{v} \cdot d\vec{O} &= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} u^2 + u^2 \cos v \\ u^2 \sin v \\ u^2 \cos v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ -u \cos v \\ -u \sin v \end{pmatrix} dudv = \\ &= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 \left(u^3 + u^3 \cos v - 2u^3 \sin v \cos v\right) dudv = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

Für $x \neq 0$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2xy, & \text{wenn } x > 0 \\ y+1, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}.$$

Für $x = 0$ berechnen wir

$$\lim_{h \to 0, h>0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h \to 0, h>0} \frac{h^2 y - 0}{h} = 0$$

$$\lim_{h \to 0, h<0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h \to 0, h>0} \frac{h(y+1) - 0}{h} = y + 1$$

Die partielle Ableitung nach x existiert genau wenn diese beiden Werte übereinstimmen, also für $y = -1$.

Für $x \neq 0$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x^2, & \text{wenn } x > 0 \\ x, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}.$$

Für $x = 0$ berechnen wir

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0,y+h) - f(0,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Die partielle Ableitung nach y existiert also überall und ist für $x = 0$ selbst gleich Null.

Mindestens eine Ableitung exisitiert nicht in den Punkten $\{(x,y) \,|\, x = 0, y \neq -1\}$

5. Aufgabe

10 Punkte

Mit Satz von Gauß ist

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{O} = \iiint_K \operatorname{div} \vec{v} dxdydz.$$

Es ist

$$\operatorname{div} \vec{v}(x,y,z) = 4z^3 e^{x^2+y^2}.$$

In Zylinderkoordinaten ist

$$\operatorname{div}\vec{v}(r,\varphi,z) = 4z^3e^{r^2}$$

und

$$K = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,|\,0 \le r \le 1, \varphi \in [0,2\pi], 0 \le z \le 1\}.$$

Mit der Funktionaldeterminante der Zylinderkoordinatentransformation r ergibt sich

$$\begin{aligned}
\iiint_K \operatorname{div}\vec{v}dxdydz &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 4z^3re^{r^2}drd\varphi dz \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi} 2z^3e^{r^2}\Big|_{r=0}^{r=1}d\varphi dz \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi} 2z^3(e-1)d\varphi dz \\
&= \int_0^1 4\pi z^3(e-1)dz \\
&= \pi z^4(e-1)\Big|_{z=0}^{z=1} \\
&= \pi(e-1).
\end{aligned}$$

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Ein Gegenbeispiel ist die Funktion $f(x,y) = e^x$. f ist stetig, aber $f(x,y) \to \infty$ für $x \to \infty$.

b) $\vec{\gamma}$ ist ein geschlossener Weg. Da $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ und der Definitionsbereich von $\vec{v}$ offen und konvex ist, ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld. Damit ist nach Satz aus der VL $\int_{\vec{\gamma}} \vec{v}\cdot\vec{ds} = 0$.

c) Ein Gegenbeispiel ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}.$$

d) Sei $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,|\,x,y,z \in [0,1]\}$, $\vec{v}(x,y,z) = (2x,0,0)^T$. Dann ist ein Potential die Funktion $u(x,y,z) = x^2$, und $\operatorname{div}\vec{v} = 2$. Nach Satz von Gauß ist dann

$$\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{O} = \iiint_K 2dxdydz = 2 \ne 0.$$

e) Ein Gegenbeispiel ist die Menge $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,|x > 0\} \cup \{(0,0)\}$. Da $(0,0)$ ein Randpunkt und Element von M ist, ist M nicht offen. Da aber $(0,1)$ Randpunkt von M ist und nicht in M enthalten ist, ist M nicht abgeschlossen.