Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 12
Mehl, Penn-Karras, Schiela 10.10.2012

Oktober – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Beachten Sie ferner, dass nicht angemeldete Klausuren ebenfalls nicht gewertet werden.

Die Klausur besteht aus zwei Teilen, einem Rechen- und einem Verständnisteil. Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 7 Punkte

Die Kurve $\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass $|\vec{\gamma}'(t)| = 1 + t$ ist.

b) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\vec{\gamma}$, das heißt $\int_{\vec{\gamma}} ds$.

c) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v}(x, y, z) = (-y, x, z)^T$ kein Potential besitzt.

2. Aufgabe 10 Punkte

Eine Parametrisierung der Fläche $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 2 - (x^2 + y^2) \geq 0\}$ ist gegeben durch

$$\vec{\Phi} : [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 2 - r^2 \end{pmatrix}.$$

Sei $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v}(x, y, z) = (1, 0, x + z)^T$.

a) Berechnen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch S.

b) Sei $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 2 - (x^2 + y^2)\}$. Berechnen Sie mit dem Satz von Gauß den Fluss von $\vec{v}$ durch ∂K, d.h. $\iint_{\partial K} \vec{v} \cdot d\vec{O}$. Hinweis: Zylinderkoordinaten.

3. Aufgabe 13 Punkte

Sei

$$f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\} \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(x + 1)^2 + 9\left(y + \frac{4}{y}\right).$$

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f mit Entwicklungspunkt $(-1, 2)$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [-2, 0]$ und $y \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ gilt:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leq 1, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq 7.$$

c) Zeigen Sie mit dem Fehlerschrankensatz, dass

$$f(-1 + \Delta x, 2 + \Delta y) \in [33, 42],$$

wobei $|\Delta x| \leq 1$ und $|\Delta y| \leq \frac{1}{2}$.

Verständnisteil

4. Aufgabe

13 Punkte

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \frac{2}{3}(x-y)^3 - x^2 + 2y + 2$$

mit

$$\operatorname{grad}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2(x-y)^2 - 2x \\ -2(x-y)^2 + 2 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $(1, 0)$ und $(1, 2)$ kritische Punkte von f auf $\mathbb{R}^2$ sind, und überprüfen Sie, ob f in diesen Punkten lokale Extrema besitzt. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Art des Extremums (lok. Minimum/Maximum).

b) Bestimmen Sie mit dem Lagrange-Verfahren die kritischen Punkte von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 2x - y = 0$.

5. Aufgabe

7 Punkte

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{x-y} & x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ von f in $(2, 1)$, sofern sie dort existiert.

b) Berechnen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ von f in $(0, 0)$, sofern sie dort existiert.

c) Berechnen Sie die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ von f in $(1, 1)$, sofern sie dort existiert.

6. Aufgabe

10 Punkte

Begründen Sie die folgenden Aussagen, oder widerlegen Sie sie durch ein Gegenbeispiel.

a) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, und $H_f(0, 0, 0)$ die Hessematrix von f in $(0, 0, 0)$. Ist $\det H_f(0, 0, 0) > 0$, so liegt in $(0, 0, 0)$ ein lokales Minimum vor.

b) Sei $\vec{\Phi}(s, t)$, $s, t \in [0, 1]$ eine Parametrisierung der Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$. Dann verschwindet der Fluss von $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial s}$ durch S, d.h. $\iint_S \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial s} \cdot d\vec{O} = 0$.

c) Sei $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ und $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^3$. Dann besitzt $\vec{v}$ kein Potential.

d) Sei A nicht beschränkt. Dann ist $\mathbb{R}^2 \setminus A$ beschränkt.

e) Sei $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ein differenzierbares Vektorfeld. Dann ist $v_1 + v_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig.