Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 2012
Mehl, Penn-Karras, Schiela 10.10.2012

Oktober – Klausur
Analysis II für Ingenieure
Musterlösung

Rechenteil

1. Aufgabe 7 Punkte

a) Es ist

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \\ \sqrt{2}t^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} |\gamma'(t)|^2 &= (\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 2t \\ &= \cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + 2t \\ &= t^2 + 2t + 1 \\ &= (1+t)^2. \end{aligned}$$

Also ist

$$|\gamma'(t)| = 1 + t,$$

da $1 + t \geq 0$.

b) Es folgt

$$\int_{\vec{\gamma}} ds = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|dt = \int_0^{2\pi} 1 + tdt = (t + \frac{1}{2}t^2)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi + 2\pi^2.$$

c) Es ist

$$\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z) = (0,0,2)^T,$$

also existiert kein Potential von $\vec{v}$.

2. Aufgabe 10 Punkte

a) Es ist

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{v}\cdot d\vec{O} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ r\cos\varphi + 2 - r^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2r^2\cos\varphi \\ 2r^2\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} dr\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} 2r^2\cos\varphi + r^2\cos\varphi + 2r - r^3 dr\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} r^3\cos\varphi + r^2 - \frac{1}{4}r^4\Big|_0^{\sqrt{2}} dr\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}\cos\varphi + 1\,d\varphi \\
&= 2\sqrt{2}\sin\varphi + \varphi\Big|_0^{2\pi} \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

b) Mit

$$\operatorname{div}\vec{v}(x,y,z) = 1$$

und der Funktionaldeterminante r der Zylinderkoordinaten folgt:

$$\begin{aligned}
\iint_M \vec{v}\cdot d\vec{O} &= \iiint_A \operatorname{div}\vec{v}(x,y,z)dxdydz \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2-r^2} r dh dr d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} (2-r^2) r dr d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} 2r - r^3 dr d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} r^2 - \frac{1}{4}r^4\Big|_0^{\sqrt{2}} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

3. Aufgabe

13 Punkte

a) Es ist $f(-1,2) = 37,5$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = 0$. Weiter ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,2) = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{72}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,2) = 9,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(-1,2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-1,2) = 0.$$

Damit ergibt sich das Taylorpolynom zu

$$T_2(x,y) = 37,5 + \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{9}{2}(y-2)^2 = 56 + x - 18y + \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}y^2.$$

b) Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x+1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 9(1 - \frac{4}{y^2}).$$

Weiter ist $-1 \leq x+1 \leq 1$ und somit

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 1$$

für alle $x \in [-2,0]$ und $y \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$. Weiter ist

$$-\frac{7}{9} \leq 1 - \frac{4}{y^2} \leq \frac{9}{25}$$

und damit

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq 7$$

für alle $x \in [-2,0]$ und $y \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

c) Es folgt

$$\begin{aligned} & |f(-1+\Delta x, 2+\Delta y) - f(-1,2)| \\ \leq\ & 1 + \frac{1}{2} \cdot 7 \\ =\ & 4,5. \end{aligned}$$

Es folgt

$$f(-1+\Delta x, 2+\Delta y) \geq f(-1,2) - 4,5 = 37,5 - 4,5 = 33,$$
$$f(-1+\Delta x, 2+\Delta y) \leq f(-1,2) + 4,5 = 37,5 + 4,5 = 42,$$

damit

$$f(-1+\Delta x, 2+\Delta y) \in [33, 42].)$$

Verständnisteil

4. Aufgabe 13 Punkte

a) Es ist vorgegeben

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-y)^2 - 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -2(x-y)^2 + 2.$$

Beide partiellen Ableitungen müssen in einem kritischen Punkt verschwinden. Für P_1 gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_1) = 2(1-0)^2 - 2 \cdot 1 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(P_1) = -2(1-0)^2 + 2 = 0.$$

Für P_2 gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_2) = 2(1-2)^2 - 2 \cdot 1 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(P_1) = -2(1-2)^2 + 2 = 0.$$

Die zweiten partiellen Ableitungen berechnen sich zu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4(x-y) - 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4(x-y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4(x-y).$$

Man erhält die Hesse-Matrizen

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad H_f(P_2) = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

$H_f(P_2)$ ist nach dem Sylvester-Kriterium negativ definit, da $H_f(P_2)$ die Hauptminoren -6 und $(-6)(-4) - 4^2 = 8 > 0$ hat.
$H_f(P_1)$ ist indefinit, da die Determinante $2 \cdot 4 - (-4)^2 = -8 < 0$ ist und $H_f(P_1)$ damit einen positiven und einen negativen Eigenwert besitzt. In P_2 liegt damit ein lokales Maximum vor, in P_1 liegt kein Extremum vor.

b) Es ist

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -1.$$

Damit ist $\operatorname{grad} g \neq \vec{0}$ für alle (x,y) mit $g(x,y) = 0$. Der Ansatz

$$\operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g$$

ergibt dann

$$\begin{pmatrix} 2(x-y)^2 - 2x \\ -2(x-y)^2 + 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

bzw. das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2(x-y)^2 - 2x &= 2\lambda \\ -2(x-y)^2 + 2 &= -\lambda. \end{aligned}$$

Addieren der beiden Gleichungen ergibt $2 - 2x = \lambda$ bzw. $x = 1 - \frac{\lambda}{2}$. Setzt man $2x = y$ in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich

$$-2x^2 + 2 = -\lambda$$

und mit $x = 1 - \frac{\lambda}{2}$ folgt

$$-2(1 - \frac{\lambda}{2})^2 + 2 = -\lambda$$

und somit

$$0 = \lambda(3 - \frac{\lambda}{2}).$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $\lambda = 0$ und $\lambda = 6$. Es ergeben sich die kritischen Punkte $(1, 2)$ und $(-2, -4)$.

5. Aufgabe 7 Punkte

1. Für $x \neq y$ ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2}{(x - y)^2}$$

und damit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 4.$$

Alternativ ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2, 1 + h) - f(2, 1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4}{1-h} - 4}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{4 - 4(1 - h)}{h(1 - h)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{4}{1 - h} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^2}{h-0} - 0}{h} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

3. Für alle $h \neq 0$ ist

$$\frac{f(1 + h, 1) - f(1, 1)}{h} = \frac{\frac{(1+h)^2}{1+h-1} - 0}{h} = \frac{(1 + h)^2}{h^2}.$$

Der Limes hiervon für $h \to \infty$ ist ∞. Damit existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ im Punkt $(1, 1)$ nicht.

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Diese Aussage ist falsch. Z.B. ist für die Funktion $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$ in $\vec{0}$

$$H_f(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\det H_f(\vec{0}) = 8 > 0$, aber f hat in $\vec{0}$ kein lokales Minimum, da z.B. $f(0,0,z) = -z^2$.

b) Diese Aussage ist wahr. Ist $\vec{\Phi}(s,t)$, $s,t \in [0,1]$ eine Parametrisierung von $S \subset \mathbb{R}^3$, so ist

$$\begin{aligned} & \iint_S \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial s} \cdot d\vec{O} \\ = \; & \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial s}(s,t) \cdot \left(\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t}(s,t) \right) ds\, dt \\ = \; & \int_0^1 \int_0^1 0 \, ds\, dt \\ = \; & 0, \end{aligned}$$

da $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial s}(s,t)$ für alle $s,t \in [0,1]$ senkrecht auf $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t}(s,t)$ steht.

c) Diese Aussage ist falsch. Z.B. besitzt $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v}(x,y,z) = (1,0,0)^T$ das Potential $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x$.

d) Diese Aussage ist falsch. Z.B. ist $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$ unbeschränkt, $\mathbb{R}^2 \setminus A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \le 0\}$ aber auch.

e) Diese Aussage ist wahr. Da $\vec{v}$ differenzierbar ist, sind auch v_1 und v_2 differenzierbar. Als Summe differenzierbarer Funktionen ist $v_1 + v_2$ differenzierbar. Da differenzierbare Funktionen stetig sind, ist folglich $v_1 + v_2$ auch stetig.