Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Dr. G. Bärwolff, Prof. Dr. F. Tröltzsch

WS 12/13
18.02.2013

Februar – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **lesbarer Schrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Beachten Sie ferner, dass nicht angemeldete Klausuren ebenfalls nicht gewertet werden.

Die Klausur besteht aus zwei Teilen, einem Rechen- und einem Verständnisteil. Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe — 9 Punkte

Gegeben sei die $2\pi-$periodische Funktion f mit $f(x) = x^2 + 3$ für $x \in [-\pi, \pi[$. Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von f.

2. Aufgabe — 7 Punkte

Seien

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto \left(z^2, \quad 2y, \quad 2xz\right)^T$$

und

$$\vec{\gamma} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos^2 t \sin t + \sin^3 t \\ \cos t - \frac{\sin t}{4+\ln 2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int\limits_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot \vec{ds}$.

3. Aufgabe — 14 Punkte

Es seien $K := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\right\}$ und $f(x, y) = 3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 4y^2$.

i. Hat f globale Extremwerte in $\mathbb{R}^2$? Existieren globale Extrema von f in K?

ii. Berechnen Sie die lokalen Extremwerte von f im Inneren von K und falls existent die globalen Extremwerte in K.

Hinweis zu ii.: Bei der Anwendung der Regel der Lagrange-Multiplikatoren ist es hilfreich, die erste Gleichung innerhalb der Gradientengleichung nach y aufzulösen.

Verständnisteil

4. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben seien das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{v}(x,y,z) = \big(xz + yz - z^2 + x, \quad yz - z^2, \quad -z^2 + z\big)^T$$

und die Menge $K := \big\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x, y \geq 0\big\}$.

i. Skizzieren Sie K.

ii. Berechnen Sie das Volumen von K.

iii. Berechnen Sie $\iint\limits_{\partial K} \vec{v} \cdot d\vec{O}$.

5. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben seien die Mengen A, B wie im Folgenden. Geben Sie jeweils den Rand ∂A und ∂B an. Bestimmen Sie außerdem die topologischen Eigenschaften (abgeschlossen, offen, beschränkt, kompakt) der Mengen.

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \geq |x| > |y|\big\},$$
$$B = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z = x^2 + y^2\big\}.$$

6. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

i. Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.

ii. Die Funktion ist partiell differenzierbar in $(0,0)$.

iii. Bestimmen Sie die Ableitung f' von f für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. (Sie dürfen für diesen Teil der Aufgabe voraussetzen, dass die Funktion überall differenzierbar ist)