Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 12/13

Prof. Dr. G. Bärwolff, Prof. Dr. F. Tröltzsch 18.02.2013

Februar – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Rechenteil

1. Aufgabe

9 Punkte

Da die Funktion $2\pi-$periodisch ist, gilt $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. Weiter ist die Funktion gerade, d.h. es gilt $b_k = 0$ für alle k. Wir berechnen noch die geraden Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 + 3\ dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^3}{3} + 3t\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} + 3\pi\right) = \underline{\underline{2\left(\frac{\pi^2}{3} + 3\right)}}. \\
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(k\omega t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(t^2+3)\cos(kt)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\underbrace{(t^2+3)\sin(kt)\frac{1}{k}\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi} 2t\sin(kt)\frac{1}{k}dt\right] = -\frac{2}{k\pi}\left[\int_0^{\pi} 2t\sin(kt)dt\right] \\
&= -\frac{2}{k\pi}\left[-2t\cos(kt)\frac{1}{k}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -2\cos(kt)\frac{1}{k}dt\right] = -\frac{2}{k^2\pi}\left[-2\pi(-1)^k - \underbrace{\left(\frac{1}{k}\sin(kt)\Big|_0^{\pi}\right)}_{=0}\right] \\
&= \underline{\underline{\frac{4}{k^2}(-1)^k}}.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist dann

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 3 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{4}{k^2}\cos(kx).}}$$

2. Aufgabe

7 Punkte

Wir untersuchen das Vektorfeld zunächst auf die Existenz eines Potentials, es gilt

$$\mathrm{rot}\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 2z-2z \\ 0-0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Da der Definitionsbereich von $\vec{v}$ der $\mathbb{R}^3$ und dieser offen und konvex ist, besitzt $\vec{v}$ ein Potential u, das wir im Folgenden mit Hilfe der Gleichung $\nabla u = -\vec{v}$ berechnen.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) \overset{!}{=} -z^2 \\
\Rightarrow\ & u(x,y,z) = -xz^2 + c(y,z) \\
\Rightarrow\ & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial c}{\partial y}(y,z) \overset{!}{=} -2y \\
\Rightarrow\ & c(y,z) = -y^2 + e(z) \\
\Rightarrow\ & \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = -2xz + \frac{de}{dz}(z) \overset{!}{=} -2xz \\
\Rightarrow\ & e(z) = \text{const.}
\end{aligned}$$

Ein Potential ist also

$$\underline{u(x,y,z) = -xz^2 - y^2}.$$

Anfangs- und Endpunkt der Kurve berechnen liefert

$$\gamma(0) = (1,0,1)^T, \qquad \gamma(\pi) = (-1,0,-1).$$

Somit ergibt sich das Integral

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot \vec{ds} = u(1,0,1) - u(-1,0,-1) = -1 - 1 = \underline{\underline{-2}}.$$

3. Aufgabe

14 Punkte

i. Ein globales Maximum in $\mathbb{R}^2$ gibt es nicht, da die Funktion nach oben unbeschränkt ist, z.B. ist $\lim_{x\to\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\infty} 3x^2 = \infty$. Ein globales Minimum liegt in $(0,0)$, denn es ist $f(x,y) = \left(x + \sqrt{2}y\right)^2 + 2x^2 + 2y^2$, wobei alle Summanden nichtnegativ sind und somit gilt $f(x,y) \geq 0$ für alle (x,y). Da $f(0,0) = 0$ gilt, liegt in $(0,0)$ ein globales Minimum. Es ist der einzige Punkt in dem es angenommen wird, da x^2 und y^2 gemeinsam nur in diesem Punkt den Wert 0 annehmen.

   Da K eine kompakte Menge ist und f als Summe von Polynomen selbst wieder stetig ist, existieren nach dem Satz vom Minimum und Maximum beide globalen Extrema auf K.

ii. Für die Untersuchung auf lokale Extrema im Inneren berechnen wir zunächst die kritischen Punkte:

$$(\nabla f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x + 2\sqrt{2}y \\ 2\sqrt{2}x + 8y \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

   Aus der ersten Gleichung erhalten wir $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}y$. Dies in die zweite Gleichung eingesetzt liefert $(-\frac{4}{3} + 8)y = 0$. Es folgt $y = 0$ und somit auch $x = 0$. Einziger kritischer Punkt ist also $(0,0)$.

   Wir haben bereits festgestellt, dass in $(0,0)$ ein globales (und somit auch lokales) Minimum vorliegt.

Alternativ über die zweite Ableitung:

$$
\begin{aligned}
f''(x,y) &= \begin{pmatrix} 6 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix} = f''(0,0) \\
&\Rightarrow \det(f''(x,y)) = 48 - 8 = 40 > 0 \Rightarrow \text{ Es liegt ein Extremum vor.} \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 6 > 0 \Rightarrow \text{ lokales Minimum in } (0,0).
\end{aligned}
$$

Zur Untersuchung der Randpunkte verwenden wir die Nebenbedingung

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 9 = 0.$$

Untersuchung auf singuläre Punkte, d.h. Lösungen des Systems

$$\begin{cases} (\nabla g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Die ersten beiden Gleichungen liefern die einzige Lösung $x = y = 0$. Diese erfüllt aber die dritte Gleichung nicht. Daher gibt es keine singulären Punkte.

Weitere kritische Punkte finden wir mit dem Lagrange-Ansatz

$$\begin{cases} \nabla f = \begin{pmatrix} 6x + 2\sqrt{2}y \\ 2\sqrt{2}x + 8y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Nach dem Hinweis löst man die erste Gleichung nach y auf und erhält

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} x(\lambda - 3).$$

Das in die zweite Gleichung einsetzen liefert

$$2x = (\lambda - 4)(\lambda - 3)x.$$

Die Gleichung hat die Lösungen $x = 0$ (daraus folgt aus Gleichung 1 $y = 0$ und somit ein Widerspruch zur letzten Gleichung) und $2 = (\lambda - 4)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 7\lambda + 12$, woraus folgt $\lambda = 2$ oder $\lambda = 5$.

$\underline{\lambda = 5}$:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} 2x = \sqrt{2}x \qquad \Rightarrow x^2 + 2x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow y = \pm\sqrt{6}$$

$\underline{\lambda = 2}$:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)x = -\frac{1}{\sqrt{2}}x \quad \Rightarrow x^2 + \frac{1}{2}x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6} \Rightarrow y = \mp\sqrt{3}$$

Mógliche Extrempunkte auf dem Rand sind also

$$z_1 = (\sqrt{3}, \sqrt{6}), z_2 = -z_1, z_3 = (\sqrt{6}, -\sqrt{3}), z_4 = -z_3.$$

Funktionswerte in den kritischen Punkten **auf ganz** K:

$$f(z_1) = f(z_2) = 45, \qquad f(z_3) = f(z_4) = 42, \qquad f(0,0) = 0.$$

Das heißt das globale Maximum liegt in $z_1 = (\sqrt{3}, \sqrt{6})$ und $z_2 = (-\sqrt{3}, -\sqrt{6})$. Das globale Minimum liegt in $(0,0)$.

Verständnisteil

4. Aufgabe

11 Punkte

i. Die Menge K beschreibt eine Viertelkugel vom Radius 1 mit Mittelpunkt im Ursprung.

ii. Am schnellsten geht es über die Volumenformel einer Vollkugel, dann ist

$$V(K) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\pi 1^3\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}.$$

Mit Hilfe eines Mehrfachintegrals:

$$K = \{(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)|r \in [0,1],\ \phi \in [0,\frac{\pi}{2}],\ \theta \in [0,\pi]\}$$

und somit

$$\begin{aligned}
V(K) &= \iiint\limits_K 1dxdydz = \iiint\limits_K r^2\sin\theta drd\phi d\theta \\
&= \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{1} r^2\sin\theta drd\phi d\theta \\
&= \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3}\sin\theta\Big|_{r=0}^{1} d\phi d\theta \\
&= \frac{\pi}{6}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta \\
&= \frac{\pi}{6}(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}) = \frac{\pi}{6}(1-(-1)) = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}.
\end{aligned}$$

iii. Wir nutzen hier den Satz von Gauß:

$$\mathrm{div}\vec{v}(x,y,z) = z+1+z-2z+1 = 2.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\partial K}\vec{v}\cdot d\vec{O} &= \iiint\limits_K \mathrm{div}\vec{v}dxdydz \\
&= \iiint\limits_K 2dxdydz = 2\iiint\limits_K dxdydz = \frac{2}{3}\pi
\end{aligned}$$

5. Aufgabe 7 Punkte

zu A:

$\partial A = \big\{(x,y)|x=y, x\in[-1,1]\big\} \cup \big\{(x,y)|y=-x, x\in[-1,1]\big\} \cup \big\{(x,y)|y\in[-1,1], x\in\{-1,1\}\big\}$.

Da die Geraden $y=-x$ und $y=x$ nicht zur Menge gehören, ist die Menge nicht abgeschlossen. Da die beiden Strecken, die parallel zur y-Achse verlaufen zur Menge gehören, ist diese auch nicht offen. Die Menge ist beschränkt, aber nicht kompakt.

zu B:

$$\partial B = B$$

Die Menge ist abgeschlossen, da alle Randpunkte zur Menge gehören. Allerdings ist sie unbeschränkt und damit auch nicht kompakt.

6. Aufgabe 12 Punkte

i. Außerhalb von $(0,0)$ ist die Funktion stetig als Komposition stetiger Funktionen.Weiter nutzen wir, dass $x^2 \leq x^2+y^2$ und damit $\big|\frac{x^2}{x^2+y^2}\big| \leq 1$ gilt.

   In $(0,0)$ gilt damit für f:

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \big|f(x,y)-f(0,0)\big| &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big|\frac{x^3y}{x^2+y^2}-0\Big| \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy|\Big|\frac{x^2}{x^2+y^2}\Big| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \big|xy\big| = 0 \end{aligned}$$

   Also ist f in $(0,0)$ und somit insgesamt auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.

ii.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0. \end{aligned}$$

   Die partiellen Ableitungen existieren und somit ist die Funktion partiell diffbar in (0,0).

iii. Da die Funktion in $(0,0)$ differenzierbar ist, ist die Ableitung wie im zweiten Teil berechnet $f'(0,0) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Big) = (0,0)$.

   Außerhalb von $(0,0)$ gelten die üblichen Ableitungsregeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{3x^2y(x^2+y^2)-x^3y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \underline{\underline{\frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x^3(x^2+y^2)-x^3y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \underline{\underline{\frac{x^5-x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}}}. \end{aligned}$$

   Also ist

$$f'(x,y) = \begin{cases} \big(\frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{x^5-x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\big), & \text{für } (x,y)\neq(0,0) \\ (0,\ 0), & \text{für } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$