Aufgabe 3

i. Ein globales Maximum in $\mathbb{R}^2$ gibt es nicht, da die Funktion nach oben unbeschränkt ist, z.B. ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x,0) = \lim\limits_{x\to\infty} 3x^2 = \infty$. Ein globales Minimum liegt in $(0,0)$, denn es ist $f(x,y) = \left(x+\sqrt{2}y\right)^2 + 2x^2 + 2y^2$, wobei alle Summanden nichtnegativ sind und somit gilt $f(x,y) \geq 0$ für alle (x,y). Da $f(0,0) = 0$ gilt, liegt in $(0,0)$ ein globales Minimum. Es ist der einzige Punkt in dem es angenommen wird, da x^2 und y^2 gemeinsam nur in diesem Punkt den Wert 0 annehmen.

   Da K eine kompakte Menge ist und f als Summe von Polynomen selbst wieder stetig ist, existieren nach dem Satz vom Minimum und Maximum beide globalen Extrema auf K.

ii. Für die Untersuchung auf lokale Extrema im Inneren berechnen wir zunächst die kritischen Punkte:

$$(\nabla f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x + 2\sqrt{2}y \\ 2\sqrt{2}x + 8y \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

   Aus der ersten Gleichung erhalten wir $x = -\frac{\sqrt{2}}{3}y$. Dies in die zweite Gleichung eingesetzt liefert $(-\frac{4}{3}+8)y = 0$. Es folgt $y = 0$ und somit auch $x = 0$. Einziger kritischer Punkt ist also $(0,0)$.

   Wir haben bereits festgestellt, dass in $(0,0)$ ein globales (und somit auch lokales) Minimum vorliegt.

   Alternativ über die zweite Ableitung:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix} = f''(0,0)$$

$\Rightarrow \det(f''(x,y)) = 48 - 8 = 40 > 0 \Rightarrow$ Es liegt ein Extremum vor.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 6 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum in $(0,0)$.

iii. Zur Untersuchung der Randpunkte verwenden wir die Nebenbedingung

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 9 = 0.$$

   Untersuchung auf singuläre Punkte, d.h. Lösungen des Systems

$$\begin{cases} (\nabla g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Die ersten beiden Gleichungen liefern die einzige Lösung $x = y = 0$. Diese erfüllt aber die dritte Gleichung nicht. Daher gibt es keine singulären Punkte.

iv. Weitere kritische Punkte finden wir mit dem Lagrange-Ansatz

$$\begin{cases} \nabla f = \begin{pmatrix} 6x + 2\sqrt{2}y \\ 2\sqrt{2}x + 8y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Es gibt nun mehrere Möglichkeiten zur Bestimmung der kritischen Punkte.
Zuerst stellt man fest, dass $x \neq 0$ und $y \neq 0$ sein müssen, denn aus $x = 0$ folgt aus der 1. Gleichung sofort $y = 0$ und aus $y = 0$ folgt aus der 2. Gleichung sofort $x = 0$, und $(x, y) = (0, 0)$ erfüllt die Nebenbedingung nicht. Damit suchen wir bei den folgenden Rechnungen nur Punkte mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$.

(a) Berechnung des Lagrange-Parameters λ

Aus der Gradientengleichung folgt

$$\begin{aligned} (6 - 2\lambda)x + 2\sqrt{2}y &= 0 \\ 2\sqrt{2}x + (8 - 2\lambda)y &= 0 \end{aligned}$$

und dieses homogene lineare Gleichungssystem hat nur dann eine nichttriviale Lösung (d.h. $x \neq 0$ **und** $y \neq 0$), wenn

$$\det \begin{pmatrix} 6 - 2\lambda & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 8 - 2\lambda \end{pmatrix} = 0$$

gilt. Und das bedeutet für λ

$$(6 - 2\lambda)(8 - 2\lambda) - 8 = 0 \iff \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2} \to \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 2\ .$$

Aus der 1. Gleichung folgt (s. Hinweis)

$$y = \frac{\lambda - 3}{\sqrt{2}} x$$

und damit erhält man für $\lambda_1 = 5$

$$y_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} x \to y_1^2 = 2x^2 \quad \text{und mit der NB} \quad 2x^2 + x^2 = 9 \iff x = \pm\sqrt{3}$$

und mit $y_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}x$ die kritischen Punkte

$$P_1 = (\sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{3}) = (\sqrt{3}, \sqrt{6}) \quad \text{bzw.} \quad P_2 = (-\sqrt{3}, -\sqrt{6}) \ .$$

Für $\lambda_2 = 2$ erhält man auf analoge Weise

$$y_2 = -\frac{x}{\sqrt{2}} \to y_2^2 = \frac{x^2}{2} \quad \text{und mit der NB} \quad \frac{1}{2}x^2 + x^2 = 9 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

und mit $y_2 = -\frac{x}{\sqrt{2}}$ die kritischen Punkte

$$P_3 = (\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}) = (\sqrt{6}, -\sqrt{3}) \quad \text{bzw.} \quad P_4 = (-\sqrt{6}, \sqrt{3}) \ .$$

Durch den Vergleich der Funktionswerte

$$f(P_1) = 9+12+24 = 45 = f(P_2) \quad \text{und} \quad f(P_3) = 18-12+12 = 18 = f(P_4)$$

findet man z.B. bei P_1 das Maximum $\max_K f = 45$.

Alternativ: Man könnte den Lagrange-Parameter auch berechnen, indem man $y = \frac{\lambda-3}{\sqrt{2}}x$ in die 2. Gleichung einsetzt und dann eine Bedingung der Form

$$x(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = 0 \ , \quad x \neq 0,$$

erhält.

(b) Elimination des Lagrange-Parameters

Durch die Multiplikation der 1. Gleichung mit y und der 2. Gleichung mit x erhält man nach der Subtraktion der enstandenen Gleichungen

$$2\sqrt{2}x^2 + 8xy = 2\sqrt{2}y^2 - 6xy \Longleftrightarrow x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}xy - y^2 = 0 \ .$$

Die Auflösung der quadratischen Gleichung nach x ergibt (...mit der p-q-Formel)

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{y^2}{8} + y^2} = \frac{-1 \pm 3}{2\sqrt{2}}y$$

also

$$x_2 = -\frac{2}{\sqrt{2}}y \Rightarrow x_2^2 = 2y^2 \quad \text{bzw.} \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y \Rightarrow x_1^2 = \frac{1}{2}y^2 \ .$$

Mit der Nebenbedingung findet man für x_2 schließlich

$$2y^2 + y^2 = 9 \Longleftrightarrow y = \pm\sqrt{3} \ ,$$

also die kritischen Punkte

$$(-\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{3}, \sqrt{3}) = (-\sqrt{6}, \sqrt{3}) = P_4 \quad \text{und} \quad (\sqrt{6}, -\sqrt{3}) = P_3 \ .$$

Für $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y$ erhält man auf analogem Weg die kritischen Punkte

$$(\sqrt{3}, \sqrt{6}) = P_1 \quad \text{bzw.} \quad (-\sqrt{3}, -\sqrt{6}) = P_2 \ .$$

Man könnte auch auf die Idee kommen, die NB in die Gleichung

$$x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}xy - y^2 = 0$$

einzusetzen. Man erhält

$$[9 - y^2] + \frac{1}{\sqrt{2}}y\sqrt{9 - y^2} - y^2 = 0 \Longleftrightarrow 2y^2 - 9 = \frac{1}{\sqrt{2}}y\sqrt{9 - y^2} \ .$$

Hier hilft nun nur Quadrieren, allerdings verändert (vergrößert) man damit die Lösungsmenge, aber man erhält mit

$$4y^4 - 36y^2 + 81 = \frac{1}{2}y^2[9 - y^2] \Longleftrightarrow y^4 - 9y^2 + 18 = 0$$

eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von y^2 mit der Lösung

$$y^2 = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 18} = \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2} \ ,$$

also

$$y_1^2 = 6 \quad \text{und} \quad y_2^2 = 3 \ .$$

Die Auswertung der NB ergibt nun die bereits gefundenen kritischen Punkte P_1 bis P_4, allerdings auch weitere Punkte, wie z.B.

$$(\sqrt{3}, -\sqrt{6}) \quad \text{oder} \quad (-\sqrt{3}, \sqrt{6}) \ ,$$

die allerdings die Gradientengleichung nicht erfüllen.