**Technische Universität Berlin**
**Fakultät II – Institut für Mathematik**
**Prof. Dr. G. Bärwolff, Prof. Dr. F. Tröltzsch**

WS 12/13
06.04.2013

# April – Klausur
# Analysis II für Ingenieure

Name: .................................. Vorname: ..................................

Matr.–Nr.: ............................... Studiengang: ...............................

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **lesbarer Schrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Beachten Sie ferner, dass nicht angemeldete Klausuren ebenfalls nicht gewertet werden.

Die Klausur besteht aus zwei Teilen, einem Rechen- und einem Verständnisteil. Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

---

**Korrektur**

| 1 | 2 | 3 | Σ |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |

| 4 | 5 | 6 | 7 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |

## Rechenteil

### 1. Aufgabe 10 Punkte

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion gegeben durch

$$f(x,y) = \sin(x) \cdot \cos(y).$$

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades der Funktion $f$ mit dem Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, 0)$.

b) Schätzen Sie die Differenz

$$|f(x,y) - 1|$$

für $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, $y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ mit Hilfe des Fehlerschrankensatzes so genau wie möglich nach oben ab. Nutzen Sie dafür, dass $f(\frac{\pi}{2}, 0) = 1$ gilt.

### 2. Aufgabe 12 Punkte

Es sei die Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := (x+1)^2 + 2\,(y-1)^2 + 3, \quad D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 2y^2 \leq 12\right\}.$$

Finden Sie alle globalen Extrempunkte der Funktion $f$ in der Menge $D$.

### 3. Aufgabe 8 Punkte

Der Graph der Funktion $z = 1 - y$, $y \in [0,1]$, rotiere um die $z$-Achse. Gegeben sei ferner das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Flussintegral von $\mathbf{rot}\,\vec{\boldsymbol{v}}$ durch die entstandene Rotationsfläche.

## Verständnisteil

### 4. Aufgabe 5 Punkte

In der folgenden Tabelle bezeichnet $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine skalare Funktion. Beide Funktionen seien beliebig oft differenzierbar. Kreuzen Sie an, ob der Ausdruck in der linken Spalte eine skalare Funktion, ein Vektorfeld oder nicht definiert ist.
(Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede falsche Antwort gibt einen Punkt Abzug. Minimale Punktzahl ist 0 Punkte. Leergelassene Felder werden nicht bewertet.)

| | Skalarfeld | Vektorfeld | nicht definiert |
|---|---|---|---|
| grad(div $\vec{v}$) | | | |
| div(grad $f$) | | | |
| rot(div $\vec{v}$) | | | |
| div($\vec{v} \times$ rot $\vec{v}$) | | | |
| grad(rot $\vec{v}$) | | | |

### 5. Aufgabe 8 Punkte

In der folgenden Tabelle sind verschiedene Mengen gegeben. Kennzeichnen Sie jeweils mit einem $+$, ob die angegebene Eigenschaft **zutrifft**. Trifft die Eigenschaft **nicht zu**, so lassen sie das Feld **leer**.
(Pro Menge gibt es für jedes richtig gesetzte +-Zeichen einen Punkt, für jedes falsch gesetzte +-Zeichen einen Punkt Abzug. Leergelassene Felder werden nicht bewertet. Minimale Punktzahl pro Menge ist 0 Punkte)

| Menge | offen | beschränkt | konvex | kompakt |
|---|---|---|---|---|
| $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 10\}$ | | | | |
| $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 10\}$ | | | | |
| $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin x \cdot \cos y \neq 0\}$ | | | | |
| $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x^2 - 1 \le y \le x^2 + 1, \lvert x\rvert \le 1\}$ | | | | |

## 6. Aufgabe

8 Punkte

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Funktion gegeben durch

$$f(x,y,z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + z^3 - 3y^2z - 3.$$

Das Vektorfeld $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\vec{v}(x,y,z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \right)^\top.$$

a) Geben Sie das Vektorfeld $\vec{v}$ explizit an.

b) Zeigen Sie, dass $f$ harmonisch ist, d.h. es gilt $\Delta f = 0$.

c) Besitzt das Vektorfeld $\vec{v}$ ein Potential? Falls ja, geben Sie ein Potential von $\vec{v}$ an.

d) Besitzt das Vektorfeld $\vec{v}$ ein Vektorpotential?

e) Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals $\int_{\vec{c}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$, wobei $\vec{c}$ die Verbindungsstrecke vom Punkt $(0,0,0)$ zum Punkt $(1,1,1)$ bezeichnet.

## 7. Aufgabe

9 Punkte

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y^3}{(x-1)^2 + y^2}, & (x,y) \neq (1,0), \\ 0, & (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f$ in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ stetig ist.

b) Untersuchen Sie in welchen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Funktion $f$ partiell nach $x$ bzw. partiell nach $y$ differenzierbar ist und geben Sie gegebenenfalls die partiellen Ableitungen an.