Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 12/13

Prof. Dr. G. Bärwolff, Prof. Dr. F. Tröltzsch 06.04.2013

April – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

a) Es gilt:

$$f(x,y) = \sin(x)\cos(y) \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = 1 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x)\cos(y) \\ -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y) \\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H_f\left(\frac{\pi}{2},0\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Das Taylorpolynom lautet also:

$$\begin{aligned}
T^f_{(\frac{\pi}{2},0)}(x,y) &= f(\frac{\pi}{2},0) + \operatorname{grad} f\left(\frac{\pi}{2},0\right)\begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{2} \\ y-0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}, y-0\right) H_f\left(\frac{\pi}{2},0\right)\begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{2} \\ y-0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)} \\
&= 1 + (0,0)\begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}, y\right)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\frac{\pi}{2} \\ y \end{pmatrix} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}, y\right)\begin{pmatrix} -x+\frac{\pi}{2} \\ -y \end{pmatrix} = 1 + \frac{1}{2}\left[-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 - y^2\right] \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(-x^2 + \pi x - \frac{\pi^2}{4} - y^2\right) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{\pi}{2}x + 1 - \frac{\pi^2}{8}. \qquad \textbf{(1)}
\end{aligned}$$

b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &= |\cos(x)\cos(y)| = |\cos(x)||\cos(y)|, \qquad \textbf{(1)} \\
\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| &= |-\sin(x)\sin(y)| = |-\sin(x)||\sin(y)|. \qquad \textbf{(1)}
\end{aligned}$$

Dabei gilt für $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, $|\cos(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $|\sin(x)| \le 1$. Genauso gilt für $y \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $|\cos(y)| \le 1$ und $|\sin(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$. Das heißt:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &= |\cos(x)||\cos(y)| \le \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \textbf{(1)} \\
\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| &= |-\sin(x)||\sin(y)| \le \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad \textbf{(1)}
\end{aligned}$$

Damit erhält man mit dem Fehlerschrankensatz für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|f(x,y) - 1| = \left|f(x,y) - f\left(\frac{\pi}{2},0\right)\right| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \qquad \textbf{(1)}$$

2. Aufgabe

12 Punkte

Schritt 1: Extrempunkte im Innern der Menge D
Es gilt:

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2\,(x+1) \\ 4\,(y-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2 \\ 4y-4 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1)}$$

Die kritischen Punkte sind gegeben durch:

$$\operatorname{grad} f = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2x+2 \\ 4y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x=-1, \quad y=1.$$

Einziger kritischer Punkt: $P_1 = (-1,1)$. **(1)**
Die Hessematrix lautet:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow H_f(-1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ist positiv definit (da z.B. alle Eigenwerte postiv sind) **(1)**
$\Rightarrow P_1 = (-1,1)$ ist lokales Minimum mit $f(-1,1) = 3$. **(1)**
Insbesondere gilt: $f(x,y) \geq 3 = f(-1,1)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
$\Rightarrow P_1 = (-1,1)$ ist globales Minimum. **(1)**

Schritt 2:
Um die Extrempunkte von f auf dem Rand ∂D der Ellipse D zu bestimmen benutzen wir die Lagrangemultiplikatoren.
Die Nebenbedingung ist gegeben durch

$$g(x,y) := x^2 + 2y^2 - 12 = 0.$$

Schritt 2.1: Singuläre Punkte
Als erstes betrachtet man die Punkte mit

$$\operatorname{grad} g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad (x,y) = (0,0). \qquad \textbf{(1)}$$

Da aber $g(0,0) = -12 \neq 0$ gilt, ist dieser Punkt für uns nicht relevant!

Schritt 2.2
Nun berechnen wir die Punkte mit

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x,y) &= \lambda \operatorname{grad} g(x,y), \quad \lambda \neq 0, \\ g(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Man erhählt also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2x+2 \\ 4y-4 \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix}, \\ x^2 + 2y^2 - 12 &= 0, \end{aligned}$$

d.h. es ergeben sich die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2x+2 &= \lambda 2x, && (1) \\ 4y-4 &= \lambda 4y, \qquad \textbf{(1)} && (2) \\ x^2 + 2y^2 - 12 &= 0. && (3) \end{aligned}$$

Durch Auflösen der Gleichung (1) nach x und der Gleichung (2) nach y erhält man:

$$\begin{aligned} 2x+2=\lambda 2x \quad &\Leftrightarrow \quad 2x-\lambda 2x=-2 \\ &\Leftrightarrow \quad x(2-2\lambda)=-2 \\ &\Leftrightarrow \quad x=\frac{-2}{2-2\lambda}=-\frac{1}{1-\lambda}, \qquad \text{für } \lambda\neq 1, \qquad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 4y-4=\lambda 4y \quad &\Leftrightarrow \quad 4y-\lambda 4y=4 \\ &\Leftrightarrow \quad y(4-4\lambda)=4 \\ &\Leftrightarrow \quad y=\frac{4}{4-4\lambda}=\frac{1}{1-\lambda}, \qquad \text{für } \lambda\neq 1. \qquad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung (3) (Nebenbedingung) ergibt damit:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{1-\lambda}\right)^2+2\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2-12=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2=12 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(1-\lambda)^2}=4 \\ &\Leftrightarrow \quad (1-\lambda)^2=\frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda=1\pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Für $\lambda=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ erhält man den Punkt $P_2=(-2,2)$ mit $f(-2,2)=6$. **(1)**
Für $\lambda=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ erhält man den Punkt $P_3=(2,-2)$ mit $f(2,-2)=30$. **(1)**

Der Vergleich der Funktionswerte zeigt, dass

$$\begin{aligned} P_3 &= (2,-2) \text{ globales Maximum und} \qquad \textbf{(1)} \\ P_1 &= (-1,1) \text{ globales Minimum} \end{aligned}$$

von f in der Menge D sind.

3. Aufgabe

8 Punkte

1. Möglichkeit: Berechnung des Flussintegrals auf direktem Weg
Die Rotationsfläche ist die Mantelfläche eines Kegeles mit Spitze im Punkt $(0,0,1)$ und der Einheitskreisfläche mit Radius 1 als Grundfläche in der $x-y-$Ebene.
Eine (natürliche) Parametrisierung $\vec{x}$ dieser Mantelfläche S ist gegeben durch:

$$\vec{x}(r,\varphi)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 1-r \end{pmatrix}, \qquad r\in[0,1], \qquad \varphi\in[0,2\pi]. \qquad \textbf{(2)}$$

Die Rotation von $\vec{v}$ lautet:

$$\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y}(x,y,z)-\frac{\partial v_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial v_1}{\partial z}(x,y,z)-\frac{\partial v_3}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x}(x,y,z)-\frac{\partial v_1}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-1 \\ 1-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Um das Flussintegral berechnen zu können, braucht man noch das vektorielle Oberflächenelement:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

Damit kann das Flussintegral berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\int\int_S \operatorname{rot}\vec{v}\cdot d\vec{O} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} d\varphi dr \qquad \textbf{(1)} \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r\cos\varphi - r\sin\varphi + 2r)\, d\varphi\, dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(\cos\varphi - \sin\varphi + 2)\, d\varphi\, dr \\
&= \int_0^1 r\left[2\varphi\Big|_0^{2\pi}\right] dr \qquad \text{da} \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 0 \qquad \textbf{(1)} \\
&= \int_0^1 4\pi r\, dr = 4\pi \frac{1}{2} r^2\Big|_0^1 = 2\pi \qquad \textbf{(1)}
\end{aligned}$$

<u>2. Möglichkeit:</u> Integralsatz von Stokes anwenden
Der Integralsatz von Stokes lautet:

$$\int\int_S \operatorname{rot}\vec{v}\cdot d\vec{O} = \int_{\partial S} \vec{v}\cdot d\vec{s} \qquad \textbf{(1)}$$

In dieser Aufgabe ist die Randkurve ∂S der Einheitskreis in der $x-y$-Ebene. Eine (natürliche) Parametrisierung ist gegeben durch:

$$\vec{x}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \textbf{(2)} \quad \text{mit} \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1)}$$

Damit liefert der Integralsatz von Stokes:

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot}\vec{v}\cdot d\vec{O} &= \int_{\partial S} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{x}(\varphi))\cdot \dot{\vec{x}}(\varphi)\, d\varphi \qquad \textbf{(1)} \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ \cos\varphi + \sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \qquad \textbf{(+2)} \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi. \qquad \textbf{(1)}
\end{aligned}$$

Verständnisteil

4. Aufgabe 5 Punkte

(Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede falsche Antwort gibt einen Punkt Abzug. Minimale Punktzahl ist 0 Punkte. Leergelassene Felder werden nicht bewertet.)

	Skalares Feld	Vektorfeld	nicht definiert
grad(div $\vec{v}$)		x **(1)**	
div(grad f)	x **(1)**		
rot(div $\vec{v}$)			x **(1)**
div($\vec{v}\times$ rot $\vec{v}$)	x **(1)**		
grad(rot $\vec{v}$)			x **(1)**

5. Aufgabe 8 Punkte

(Pro Menge gibt es für jedes richtig gesetzte +-Zeichen einen Punkt, für jedes falsch gesetzte +-Zeichen einen Punkt Abzug. Leergelassene Felder werden nicht bewertet. Minimale Punktzahl pro Menge ist 0 Punkte)

Menge	offen	beschränkt	konvex	kompakt
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\vert\, x^2+y^2<10\}$	+ **(1)**	+ **(1)**	+ **(1)**	
$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\vert\, 1\le x^2+y^2+z^2\le 10\}$		+ **(1)**		+ **(1)**
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\vert\, \sin x\cdot\cos y\neq 0\}$	+ **(1)**			
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\vert\, -x^2-1\le y\le x^2+1, \vert x\vert\le 1\}$		+ **(1)**		+ **(1)**

6. Aufgabe 8 Punkte

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 4x^3-12xy^2,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= -12x^2y+4y^3-6yz,\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 3z^2-3y^2.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\vec{v}(x,y,z)=\begin{pmatrix}4x^3-12xy^2\\ -12x^2y+4y^3-6yz\\ 3z^2-3y^2\end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

b) Es gilt:

$$\Delta f=\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=12x^2-12y^2-12x^2+12y^2-6z+6z=0. \qquad \textbf{(1)}$$

c) Ja **(1)**, das Vektorfeld $\vec{v}$ besitzt ein Potential $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, nämlich

$$u(x, y, z) := -f(x, y, z), \qquad \textbf{(1)}$$

da nach Voraussetzung $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ ist und somit

$$\operatorname{grad}(u) = \operatorname{grad}(-f) = -\operatorname{grad}(f) = -\vec{v}$$

gilt.

Alternativ ist ein allgemeines Potential von der Form $u(x, y, z) = -f(x, y, z) + C$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

<u>Andere Möglichkeit für die Existenz:</u> Man verweist man auf die Beziehung $\operatorname{rot}(\vec{v}) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ oder rechnet notfalls die Potentialbedingung $\operatorname{rot}(\vec{v}) = 0$ nach.

d) Wegen

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

nach Teilaufgabe (b) und $\mathbb{R}^3$ konvex **(1)**, besitzt f ein Vektorpotential.

e) Da $\vec{v}$ die Stammfunktion f besitzt, berechnet man das Kurvenintegral durch

$$\int_{\vec{c}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = f(1, 1, 1) - f(0, 0, 0) = -9 - (-3) = -6. \qquad \textbf{(2)}$$

<u>Andere Möglichkeit:</u> Man berechnet das Kurvenintegral explizit aus und erhält:

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{c}} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \vec{v}(\vec{c}(t)) \cdot \dot{\vec{c}}(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 4t^3 - 12t^3 \\ -12t^3 + 4t^3 - 6t^2 \\ 3t^2 - 3t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 \left(-16t^3 - 6t^2\right) dt = -16\frac{t^4}{4} - 6\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1 = -4 - 2 = -6 \qquad \textbf{(2)}
\end{aligned}$$

7. Aufgabe

9 Punkte

a) Außerhalb von $(1, 0)$ ist die Funktion stetig als Komposition stetiger Funktionen. **(1)** Für $(x, y) = (1, 0)$ gilt:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{(x,y)\to(1,0)} \left|f(x, y) - f(1, 0)\right| = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \left|\frac{y^3}{(x-1)^2 + y^2}\right| \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,0)} \left|y \cdot \frac{y^2}{(x-1)^2 + y^2}\right| \\
&\leq \lim_{(x,y)\to(1,0)} |y| \qquad \text{da } \left|\frac{y^2}{(x-1)^2 + y^2}\right| \leq 1 \qquad \textbf{(1)} \\
&= 0. \qquad \textbf{(1)}
\end{aligned}$$

Das heißt f ist auch im Punkt $(x, y) = (1, 0)$ stetig.

b) Für die partielle Ableitung nach x gilt im Punkt $(x, y) \neq (1, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{0 - y^3 \cdot 2(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2} = \frac{-2xy^3+2y^3}{((x-1)^2+y^2)^2}. \qquad \textbf{(1)}$$

Im Punkt $(x, y) = (1, 0)$ gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = \lim_{h\to 0} 0 = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

f ist also in allen Punkten nach x partiell differenzierbar. **(1)**

Für die partielle Ableitung nach y gilt im Punkt $(x, y) \neq (1, 0)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{3y^2 \cdot ((x-1)^2+y^2) - y^3 \cdot 2y}{((x-1)^2+y^2)^2} = \frac{3y^2(x-1)^2+3y^4-2y^4}{((x-1)^2+y^2)^2} \\ &= \frac{3y^2(x^2-2x+1)+y^4}{((x-1)^2+y^2)^2} = \frac{3x^2y^2-6xy^2+3y^2+y^4}{((x-1)^2+y^2)^2}. \qquad \textbf{(1)}\end{aligned}$$

Im Punkt $(x, y) = (1, 0)$ gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,0+h)-f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = \lim_{h\to 0} 1 = 1. \qquad \textbf{(1)}$$

f ist also in allen Punkten nach y partiell differenzierbar. **(1)**