Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 13
G. Bärwolff, C. Mehl, G. Penn-Karras 15.07.2013

Juli – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **lesbarer Schrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Beachten Sie ferner, dass nicht angemeldete Klausuren ebenfalls nicht gewertet werden.

Die Klausur besteht aus zwei Teilen, einem Rechen- und einem Verständnisteil. Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

5	6	7	Σ

<u>Rechenteil</u>

1. Aufgabe 7 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + xy + y^3 + z^2.$$

i) Berechnen Sie alle lokalen Extremwerte der Funktion f.

ii) Besitzt die Funktion globale Extrema?

2. Aufgabe — 7 Punkte

Die Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ liege im 1. Quadranten und sei begrenzt durch die Kurven

$$y = -1 + \sqrt{x},\ y = 1 - x \text{ und } y = 1.$$

i) Skizzieren Sie die Menge A.

ii) Bestimmen Sie das Integral von $f(x,y) = 2y$ über die Menge A.

3. Aufgabe — 8 Punkte

Gegeben seien $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z \in [-1,1],\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ und das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - z^2 \\ xy^2 + x^2 y + z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Flussintegral von $\vec{v}$ durch den Rand von K.

4. Aufgabe — 8 Punkte

Gegeben seien die Menge $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ und die Funktionen

$$f : D \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{y}\cos(x^2 + y) \\ \frac{1}{y}\sin(x^2) \end{pmatrix},$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (s,t) \mapsto e^{st} + st.$$

i) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von g mit dem Entwicklungspunkt $(0,0)$.

ii) Wieviele Zeilen und Spalten haben die Funktionalmatrizen $f'(x,y)$ bzw. $(g \circ f)'(x,y)$?

iii) Berechnen Sie $f(0, \frac{\pi}{2})$ und $(g \circ f)'(0, \frac{\pi}{2})$.

Verständnisteil

5. Aufgabe 10 Punkte

Skizzieren Sie die folgenden Mengen oder beschreiben Sie diese in Worten und geben Sie ihre topologischen Eigenschaften (offen, abgeschlossen, beschränkt, kompakt) an.

i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 < 9\}$,

ii) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x) = 1, \cos(y) = 1\}$,

iii) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -5x + y \in \mathbb{R}\}$,

iv) $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2z, z \in [0, 2]\right\}$.

6. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben seien die Menge $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -1\}$ und die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y \ln(x+1)}{y^2 + (\ln(x+1))^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

i) Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\lim_{y\to 0} f(1, y) = 0$ und $\lim_{x\to 1} f(x, 0) = 0$.

(b) Es gilt $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}, \ln(\frac{1}{n} + 1)) = (0, 0)$.

(c) Die Funktion f ist unstetig in $(0, 0)$.

(d) Die Funktion f ist in $(0, 0)$ und in $(0, 1)$ nach x und y partiell differenzierbar.

ii) Folgt aus Teil (a) bereits, dass f in $(1, 0)$ stetig ist? Ist die Funktion in $(0, 0)$ differenzierbar?

7. Aufgabe 10 Punkte

Seien $\vec{v}$, $\vec{w} : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$, zwei stetig differenzierbare Vektorfelder. Begründen Sie die folgenden Aussagen oder widerlegen Sie diese durch ein Gegenbeispiel.

i) Besitzen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ jeweils ein Potential, so hat auch $\vec{v} \cdot \vec{w}$ ein Potential.

ii) Ist $u : D \to \mathbb{R}$ ein Potential von $\vec{v}$, so gilt $\int_\gamma \vec{v}\, \vec{\mathrm{d}s} = 0$ für eine beliebige Kurve γ in D.

iii) Sei $u : D \to \mathbb{R}$ ein Potential von $\vec{v}$ und sei γ die Randkurve einer glatten Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$. Dann gilt $\int_\gamma \vec{v}\, \vec{\mathrm{d}s} = 0$. *(Hinweis: Nutzen Sie einen Integralsatz.)*

iv) Sei D eine nichtkonvexe Menge und $\vec{v} : D \to \mathbb{R}^3$ besitze ein Potential. Dann gilt $\operatorname{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$.

v) Seien $D = \mathbb{R}^3$ und $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion und

$$\vec{w}(x, y, z) = (x + y + \phi(z), y^3 + zx^3, z^2 + x^2)^T,$$
$$\vec{v}(x, y, z) = (-x^3, -2x, 3x^2 z - 1)^T.$$

Dann ist $\vec{w}$ ein Vektorpotential von $\vec{v}$.