Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 13

G. Bärwolff, C. Mehl, G. Penn-Karras 15.07.2013

Juli – Klausur
Analysis II für Ingenieure

Rechenteil

1. Aufgabe 7 Punkte

i) Um die lokalen Extrema der Funktion f zu bestimmen, suchen wir zunächst alle kritischen Punkte. Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ x+3y^2 \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der dritten Gleichung folgt $z = 0$, die erste Gleichung liefert $y = -x$. Wenn wir dies in die zweite Gleichung einsetzen, erhalten wir

$$x + 3y^2 = x + 3x^2 = x(1+3x) = 0,$$

welches mit $x = 0$ oder $x = -1/3$ gelöst wird. Die kritischen Punkte für lokale Extrema sind also

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um zu entscheiden, ob in diesen Punkten wirklich ein lokales Extremum vorliegt, untersuchen wir die Definitheit der Hessematrix in diesen Punkten. Die Hessematrix von f ist gegeben durch

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

In dem kritischen Punkt $\vec{x}_1 = (0,0,0)^T$ erhalten wir

$$f''(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist offenbar indefinit, dies folgt zum Beispiel aus dem Hauptminorenkriterium wegen

$$\det\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = 1,\ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1.$$

Wir können dies aber auch einsehen, indem wir die Eigenwerte der Matrix bestimmen. Das charakteristische Polynom von $f''(0,0,0)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)((1-\lambda)(-\lambda)-1) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-1). \end{aligned}$$

Eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms (und damit ein Eigenwert) ist offenbar 2, die anderen beiden Nullstellen sind gegeben durch

$$\lambda^2-\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Wegen $1-\sqrt{5}<0$ hat die Matrix einen negativen Eigenwert und da der Eigenwert 2 positiv ist, ist $f''(0,0,0)$ indefinit. Insgesamt liegt in dem Punkt $(0,0,0)^T$ also ein Sattelpunkt und kein lokales Extremum vor.

In dem kritischen Punkt $\vec{x}_2 = (-1/3, 1/3, 0)^T$ erhalten wir

$$f''(-1/3,1/3,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist offenbar positiv definit. Dies können wir wieder mit dem Hauptminorenkriterium einsehen, es gilt

$$\det\begin{pmatrix}1\end{pmatrix} = 1, \ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1, \ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

Da alle Determinanten positiv sind, ist die Matrix positiv definit. Alternativ können wir auch hier die Eigenwerte bestimmen. Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-1) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-1). \end{aligned}$$

Eine Nullstelle dieses Polynoms (und damit ein Eigenwert von $f''(-1/3,1/3,0)$) ist offenbar 2, die anderen beiden sind gegeben durch

$$\lambda^2-3\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Wegen $3>\sqrt{5}$ sind alle Eigenwerte positiv, also liegt in dem Punkt $\vec{x}_2 = (-1/3,1/3,0)^T$ ein lokales Minimum vor.

ii) Die Funktion f hat keine globalen Extrema, zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned} \lim_{y\to\infty} f(0,y,0) &= \lim_{y\to\infty} y^3 = \infty, \\ \lim_{y\to-\infty} f(0,y,0) &= \lim_{y\to-\infty} y^3 = -\infty. \end{aligned}$$

2. Aufgabe

7 Punkte

i) Die Menge ist wie folgt:

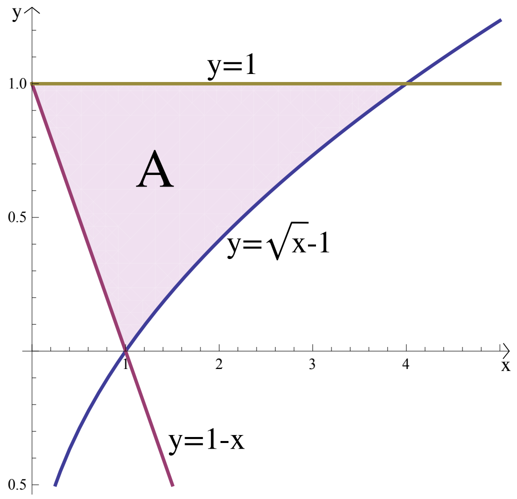

Abbildung 1: Skizze der Menge A.

ii) Die Geraden schneiden sich in den Punkten $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(4, 1)$. Es gibt zwei unterschiedliche Rechenwege, je nach dem ob zunächst nach x oder nach y integriert wird.

Äußere Integration nach x:

In diesem Fall teilen wir die Menge A an der Geraden $x = 1$ auf. Im Bereich $0 \le x \le 1$ ist y beschränkt durch $1 - x \le y \le 1$ und im Bereich $1 \le x \le 4$ ist y beschränkt durch $\sqrt{x} - 1 \le y \le 1$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\iint_A 2y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 2y \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^4 \int_{\sqrt{x}-1}^1 2y \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[y^2\right]_{y=1-x}^{y=1} \, \mathrm{d}x + \int_1^4 \left[y^2\right]_{y=\sqrt{x}-1}^{y=1} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 1 - (1-x)^2 \, \mathrm{d}x + \int_1^4 1 - (\sqrt{(x)} - 1)^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 -x^2 + 2x \, \mathrm{d}x + \int_1^4 -x + 2\sqrt{x} \, \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{-x^3}{3} + x^2\right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{-x^2}{2} + \frac{4\sqrt{x}^3}{3}\right]_{x=1}^{x=4} \\
&= -\frac{1}{3} + 1 - 8 + \frac{32}{3} + \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \\
&= \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Äußere Integration nach y:

In diesem Fall müssen wir das Integral nicht in zwei Teile aufteilen. Wir erhalten aus

$y = \sqrt{x} - 1$ die Kurve $x = (y+1)^2$ und aus $y = 1 - x$ erhalten wir $x = 1 - y$. Insgesamt ist y beschränkt durch $0 \le y \le 1$ und x durch $1 - y \le x \le (y+1)^2$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\iint_A 2y \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_{1-y}^{(y+1)^2} 2y \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 2y(y+1)^2 - 2y(1-y) \ \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 2y^3 + 6y^2 \ \mathrm{d}y = \left[\frac{y^4}{2} + 2y^3\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

3. Aufgabe

8 Punkte

Es soll das Integral

$$\iint_{\partial K} \vec{v} \ \mathrm{d}\vec{O}$$

bestimmt werden. Hier gibt es zwei Lösungswege, einmal mit dem Satz von Gauß und einmal ohne diesen Satz.

1. Lösungsweg: Mit dem Satz von Gauß.
Mit $\operatorname{div}(\vec{v})(x,y,z) = 2x + 1$ und dem Satz von Gauß erhalten wir

$$\iint_{\partial K} \vec{v} \ \mathrm{d}\vec{O} = \iiint_K \operatorname{div}(\vec{v}) \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_K 2x + 1 \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Eine Parametrisierung des Hohlzylinders ist gegeben durch

$$\vec{g}\colon [1,2] \times [0,2\pi] \times [-1,1] \to \mathbb{R}^3, \ (r,\varphi,t) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ t \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\det g'(\varphi, r, t) &= \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) = r.\end{aligned}$$

Es folgt mit der Transformationsformel

$$\begin{aligned}\iint_{\partial K} \vec{v} \ \mathrm{d}\vec{O} = \iiint_K 2x + 1 \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_1^2 \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} (2r\cos(\varphi) + 1)r \ \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t\mathrm{d}r \\ &= \int_1^2 \int_{-1}^1 \left[2r^2\sin(\varphi) + r\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \ \mathrm{d}t\mathrm{d}r \\ &= \int_1^2 \int_{-1}^1 2\pi r \ \mathrm{d}t\mathrm{d}r = \int_1^2 4\pi r \ \mathrm{d}r \\ &= 4\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 = 4\pi\left(2 - \frac{1}{2}\right) = 6\pi.\end{aligned}$$

2. Lösungsweg: Ohne den Satz von Gauß.

Der Rand von K besteht aus 4 Komponenten, die beiden „Deckel“ D_1 (mit $z = 1$) und D_2 (mit $z = -1$) und die beiden Mantelflächen M_1 (mit $r = 1$) und M_2 (mit $r = 2$). Wir bestimmen zunächst die Integrale über die beiden „Deckel“. Hier sind x und y in einem Kreisring mir den Radien 1 und 2, es gilt also $1 < x^2 + y^2 < 4$ und $z = -1$ bzw. $z = 1$. Eine Parametrisierung ist gegeben durch

$$\vec{g}_D \colon [1,2] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix},$$

wobei z bei D_1 konstant 1 und bei D_2 konstant -1 ist. Für das vektorielle Oberflächenelement ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{O} &= z\left(\frac{\partial \vec{g}_D}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{g}_D}{\partial \varphi}\right)(r,\varphi)\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = z \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\ &= z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) \end{pmatrix}\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

Hier multiplizieren wir das vektorielle Oberflächenelement mit z (also mit 1 und -1), da dieses stets nach außen zeigen soll. Für D_1 (mit $z = 1$) erhalten wir also $\mathrm{d}\vec{O} = (0,0,r)^T\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ und für D_2 (mit $z = -1$) erhalten wir $\mathrm{d}\vec{O} = -(0,0,r)^T\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$. Für $i = 1,2$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \iint_{D_i} \vec{v}\ \mathrm{d}O &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{g}_D(r,\varphi)) \cdot z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}\ \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\ &= z \int_1^2 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r^2 \\ r^2\cos^2(\varphi) - 1 \\ r^3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi) + r^3\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) + z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}\ \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\ &= z \int_1^2 \int_0^{2\pi} r^4\cos(\varphi)\sin^2(\varphi) + r^4\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) + zr\ \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\ &= z \int_1^2 \left[r^4\left(\frac{\sin^3(\varphi)}{3} - \frac{\cos^3(\varphi)}{3}\right)\right]_0^{2\pi} + 2\pi z r\ \mathrm{d}r \\ &= 2\pi z^2 \int_1^2 r\ \mathrm{d}r = 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 = 3\pi. \end{aligned}$$

Es bleiben die beiden Integrale über die Manteflächen zu bestimmen. Eine Parametrisierung dieser ist gegeben durch

$$\vec{g}_M \colon [0,2\pi] \times [-1,1] \to \mathbb{R}^3,\ (\varphi,t) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ t \end{pmatrix}$$

mit $r = 1$ bei der Manteflläche M_1 und $r = 2$ bei M_2. Das vektorielle Oberflächenelement ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{O} &= (-1)^r \left(\frac{\partial \vec{g}_M}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{g}_M}{\partial t} \right)(t,\varphi)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi \\
&= (-1)^r \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ \mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi \\
&= (-1)^r \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}\ \mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi.
\end{aligned}
$$

Der Faktor $(-1)^r$ ist auch hier dafür, dass das vektorielle Oberflächenelement stets nach außen zeigt. Für $i = 1, 2$ erhalten wir damit

$$
\begin{aligned}
\iint_{M_i} \vec{v}\ \mathrm{d}\vec{O} &= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \vec{v}(g_M(\varphi,t)) \cdot (-1)^r \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}\ \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t \\
&= (-1)^r \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \begin{pmatrix} r^2 \\ r^2\cos^2(\varphi) - t^2 \\ r^3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi) + r^3\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) + t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}\ \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t \\
&= (-1)^r \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} r^3\cos(\varphi) + r^3\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) - rt^2\sin(\varphi)\ \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t \\
&= (-1)^r \int_{-1}^{1} \left[r^3\sin(\varphi) - \frac{r^3\cos^3(\varphi)}{3} + rt^2\cos(\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\ \mathrm{d}t \\
&= (-1)^r \int_{-1}^{1} 0\ \mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhalten wir also

$$
\begin{aligned}
\iint_{\partial K} \vec{v}\ \mathrm{d}\vec{O} &= \iint_{D_1} \vec{v}\ \mathrm{d}\vec{O} + \iint_{D_2} \vec{v}\ \mathrm{d}\vec{O} + \iint_{M_1} \vec{v}\ \mathrm{d}\vec{O} + \iint_{M_2} \vec{v}\ \mathrm{d}\vec{O} \\
&= 3\pi + 3\pi + 0 + 0 = 6\pi.
\end{aligned}
$$

4. Aufgabe

8 Punkte

i) Für das Taylorpolynom berechnen wir zunächst die Ableitungen im Entwicklungspunkt, es gilt

$$
\begin{aligned}
g(s,t) &= e^{st} + st && \Rightarrow g(0,0) = 1, \\
g'(s,t) &= \left(te^{st} + t,\quad se^{st} + s\right) && \Rightarrow g'(0,0) = (0,0), \\
g''(s,t) &= \begin{pmatrix} t^2e^{st}, & ste^{st} + e^{st} + 1 \\ ste^{st} + e^{st} + 1 & t^2e^{st} \end{pmatrix} && \Rightarrow g''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Damit hat das Taylorpolynom die Form

$$
(Tg_{(0,0)})(s,t) = 1 + \frac{1}{2}(s,t) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = 1 + 2st.
$$

ii) f ist eine (differenzierbare) Abbildung von $D \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, d.h. die Ableitung ist eine 2×2-Matrix. $g \circ f$ bildet von D in die reellen Zahlen ab, d.h. seine Ableitung ist eine 1×2-Matrix.

iii) Es ist $f(0, \frac{\pi}{2}) = (0, 0)$.

Damit gilt für die Ableitung:

$$(g \circ f)'(0, \frac{\pi}{2}) = g'(f(0, \frac{\pi}{2})) \cdot f'(0, \frac{\pi}{2}) = g'(0, 0) \cdot f'(0, \frac{\pi}{2}) = (0, 0) f'(0, \frac{\pi}{2}) = (0, 0).$$

Alternativ können die beteiligten Ableitungen zunächst symbolisch berechnet werden. Dabei gilt:

$$g'(f(x,y)) = \left(\tfrac{1}{y}\sin(x^2)\left(e^{\frac{x}{y^2}\cos(x^2+y)\sin(x^2)} + 1\right),\quad \tfrac{x}{y}\cos(x^2+y)\left(e^{\frac{x}{y^2}\cos(x^2+y)\sin(x^2)} + 1\right)\right),$$

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y}\cos(x^2+y) - \frac{2x^2}{y}\sin(x^2+y) & -\frac{x}{y}\cos(x^2+y) - \frac{x}{y}\sin(x^2+y) \\ \frac{2x}{y}\cos(x^2) & -\frac{1}{y^2}\sin(x^2) \end{pmatrix}$$

Somit ist dann

$$g'(f(0, \frac{\pi}{2})) = (0, 0) \text{ und } f'(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$(g \circ f)'(0, \frac{\pi}{2}) = (0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0).$$

Verständnisteil

5. Aufgabe

10 Punkte

i) Die Menge A beschreibt eine gelochte Kreisscheibe mit innerem Radius 2 und äußerem Radius 3 um den Nullpunkt. Dabe ist die innere Begrenzung (also der Kreis mit Radius 2 um den Nullpunkt) in der Menge enthalten, die äußere Begrenzung (also der Kreis mit Radius 3 um den Nullpunkt) hingegen nicht. Damit ist die Menge A beschränkt, aber weder offen, abgeschlossen noch kompakt.

ii) Die Menge B besteht aus allen Punkten der Form $(\pi/2 + 2k\pi, 2l\pi)$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$. Damit ist B offenbar unbeschränkt. Weiterhin ist B als diskrete Punktmenge abgeschlossen (der Rand von B ist B selbst), aber weder offen noch kompakt.

iii) Die Menge C ist der gesamte $\mathbb{R}^3$, da die Bedingung $-5x + y \in \mathbb{R}$ für $x, y \in \mathbb{R}$ stets erfüllt ist. Also ist C offen und abgeschlossen, aber weder offen noch beschränkt.

iv) Die Menge D beschreibt einen Kegel mit Spitze $(0, 0, 0)$ und der Kreisscheibe mit Radius 4 in der Ebene $z = 2$ um den Punkt $(0, 0, 4)$ als Grundfläche. Der Rand des Kegels ist in D enthalten, damit ist D abgeschlossen, beschränkt und kompakt aber nicht offen.

6. Aufgabe

10 Punkte

i) (a) Es gilt

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} f(1, y) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}} \frac{y\ln(1+1)}{y^2 + (\ln(1+1))^2} = \frac{0\ln(2)}{0 + (\ln(2))^2} = 0,$$

sowie

$$\lim_{x\to 1} |f(x, 0)| = \lim_{x\to 1} |0| = 0.$$

(b) Eine Folge im $\mathbb{R}^2$ konvergiert genau dann, wenn jede Komponente konvergiert. Wir erhalten mit der Stetigkeit des Logarithmus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) = \ln(1) = 0.$$

Damit konvergieren beide Komponente und die Folge $(\frac{1}{n}, \ln(\frac{1}{n} + 1))$ konvergiert insgesamt gegen den Grenzwert $(0, 0)$.

(c) Die Funktion ist unstetig in $(0, 0)$. Die Folge aus dem Aufgabenteil (b) konvergiert nämlich gegen $(0, 0)$ und es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}, \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right)\right) - f(0, 0)\right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right)^2}{\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right)^2 + \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right)^2} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right)^2}{2\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right)^2} \right| = \frac{1}{2} \neq 0.\end{aligned}$$

(d) In diesem Aufgabenteil benutzen wir häufig $\ln(1) = 0$. Wir untersuchen die beiden Punkte getrennt voneinander.

Zu dem Punkt $(0, 0)$:

Für die partielle Ableitung nach x erhalten wir

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Damit ist f in $(0, 0)$ partiell nach x differenzierbar. Für die partielle Ableitung nach y erhalten wir

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\ln(1)}{h^2+\ln(1)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = 0.$$

Also ist f in $(0, 0)$ auch partiell nach y differenzierbar.

Zu dem Punkt $(0, 1)$:

In einer Umgebung dieses Punktes ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen selbst differenzierbar und damit auch partiell differenzierbar nach x und y. Dies können wir aber auch mit der Definition der partiellen Ableitung einsehen. Für die partielle Ableitung nach x erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h, 1) - f(0, 1)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\ln(h+1)}{1+\ln(h+1)^2} - \frac{\ln(1)}{1+\ln(1)^2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\ln(h+1)}{1+\ln(h+1)^2} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(h+1)}{(1+\ln(h+1)^2)h}.\end{aligned}$$

Auf diesen Grenzwert dürfen wir die Regel von l'Hôpital anwenden, da sowohl der Zähler, als auch der Nenner des Bruches gegen 0 konvergieren. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\ln(h+1)}{(1+\ln(h+1)^2)h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+h}}{(1+\ln(h+1)^2) + 2h\frac{\ln(h+1}{h+1}} \\ &= \frac{1}{1+\ln(1)^2} = 1.\end{aligned}$$

Damit ist f in $(0, 1)$ partiell nach x differenzierbar. Für die partielle Ableitung nach y erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(0, 1+h) - f(0, 1)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(1+h)\ln(1)}{(1+h)^2+\ln(1)^2} - \frac{\ln(1)}{1+\ln(1)^2}}{h} \\ &= 0,\end{aligned}$$

womit f in $(0, 1)$ auch partiell nach y differenzierbar ist.

ii) Aus Teil (a) folgt nicht, dass f in $(1, 0)$ stetig ist. In Teil (a) wurden lediglich zwei konkrete Grenzwerte untersucht und nicht der allgemeine Fall. Die Funktion ist in $(0, 0)$ nicht differenzierbar, da sie nach Punkt (c) dort unstetig ist.

7. Aufgabe

10 Punkte

i) Die Aussage ist falsch, $\vec{v} \cdot \vec{w}$ ist kein Vektorfeld und kann folglich auch kein Potential besitzen. Ein Gegenbeispiel ist also durch jede Vektorfelder $\vec{v}$ und $\vec{w}$ mit Potential gegeben, zum Beispiel $\vec{v}(x, y, z) = \vec{w}(x, y, z) = (x, y, z)^T$.

ii) Wenn u ein Potential von $\vec{v}$ ist, folgt für eine Kurve $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$

$$\int_\gamma \vec{v}\ \mathrm{d}\vec{s} = u(\gamma(a)) - u(\gamma(b)).$$

Wenn die Kurve γ nicht geschlossen ist, muss dieser Ausdruck nicht zwangsläufig null sein. Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $\vec{v}(x, y, z) = (1, 1, 1)^T$, $u(x, y, z) = x + y + z$ und γ die Strecke von $(0, 0, 0)^T$ nach $(1, 1, 1)^T$. In diesem Fall gilt nämlich

$$\int_\gamma \vec{v}\ \mathrm{d}\vec{s} = u(0, 0, 0) - u(1, 1, 1) = 0 - 3 = -3 \neq 0.$$

iii) Diese Aussage ist wahr. Wenn $\vec{v}$ ein Potential besitzt, gilt $\operatorname{rot}(\vec{v}) = 0$ und der Satz von Stokes liefert

$$\int_\gamma \vec{v}\ \mathrm{d}\vec{s} = \iint\limits_F \operatorname{rot}(\vec{v})\ \mathrm{d}\vec{O} = \iint\limits_F 0\ \mathrm{d}\vec{O} = 0.$$

iv) Auch diese Aussage ist wahr. Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials ist $\operatorname{rot}(\vec{v}) = 0$, unabhängig von dem Definitionsbereich von $\vec{v}$.

v) Das Vektorfeld $\vec{w}$ ist ein Vektorpotential von $\vec{v}$ genau dann, wenn $\operatorname{rot}(\vec{w}) = \vec{v}$ gilt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\vec{w})(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 0 - x^3 \\ \phi'(z) - 2x \\ 3x^2 z - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^3 \\ -2x \\ 3x^2 z - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \phi'(z) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \vec{v}(x, y, z) + \begin{pmatrix} 0 \\ \phi'(z) \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Also ist $\vec{w}$ genau dann ein Vektorpotential von $\vec{v}$, wenn $\phi'(z) = 0$ für jedes $z \in \mathbb{R}$ gilt. Da ϕ aber eine beliebige Funktion ist, gilt dies im Allgemeinen nicht. Die Aussage ist also falsch, ein Gegenbeispiel liefert $\vec{w}$ mit der Funktion $\phi(z) = z$.